Miara centralności Attachment: aksjomatyczne podejście do analizy łączności w sieciach.

Michał Szczęśniak

- Wartość Myersona
- Aksjomaty związane z łącznością
- Miara centralności Attachment i jej aksjomatyzacja
- Właściwości miary Attachment i jej zastosowanie

Wartość Shapleya

Określa wartość wypłaty dla graczy w grach koalicyjnych na podstawie ich wkładu marginalnego.

$$SV_v(f) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{v\}} \beta(S, N)(f(S \cup \{v\}) - f(S))$$

f - funkcja charakterystyczna gry koalicyjnej
N - zbiór graczy
β(S, N) = |S|! * (|N| − |S| − 1)! / |N|!

f(S∪{v})−f(S) - wkład marginalny gracza v do koalicji S

Wartość Myersona

Współpraca między graczami jest ograniczona grafem komunikacji.

Wartość niespójnej koalicji jest równa sumie wartości jej spójnych składowych.

$$MV_v(f, G) = SV_v(f/G)$$

$$f/G(S) = \sum_{C \in K(G[S])} f(C), \text{ dla każdego } S \subseteq N$$

gdzie:
G = (V, E)
K(G[S]) - podział V na rozłączne zbiory wierzchołków indukujące spójne składowe G

Aksjomaty

Lokalność - dla każdego grafu G = (V, E) i każdego wierzchołka $v \in V$, centralność v zależy tylko od spójnej składowej grafu G, do której należy v.

$$F_v(G) = F_v(G[K_v(G)])$$

$K_v(G)$ - spójna składowa G do której należy v

Aksjomaty

Normalizacja - dla każdego G = (V, E) i v∈V:

$$F_v(G) \in [0, n-1]$$

$$F_v(G) = 0 \text{ gdy } v \text{ jest izolowany}$$

$$F_v(G) = n-1 \text{ gdy G jest gwiazdą, której środkiem jest } v$$

Aksjomaty

Uczciwość - dla każdego G=(V, E) i dla każdego u, v $\in$ V, dodanie krawędzi e={u, v} tak samo wpływa na centralność u i v

$$F_v((V, E \cup \{e\})) - F_v((V, E)) = F_u((V, E \cup \{e\})) - F_u((V, E))$$

Aksjomaty

Monotoniczność - dla każdego grafu G=(V, E) nie zmniejsza centralności żadnego wierzchołka należącego do V, czyli dla każdego u, v, w∈V

$$F_v((V, E \cup \{\{u, w\}\})) \geq F_v((V, E))$$

Gain-loss - dla każdego spójnego grafu G=(V, E) i dla każdej pary wierzchołków u, w∈V, dodanie krawędzi {u, w} do E nie zmienia sumy miar centralności

$$\sum_{v \in N} F_v((V, E \cup \{\{u, w\}\})) = \sum_{v \in N} F_v((V, E))$$

Aksjomat gain-loss dotyczy tylko spójnych grafów i nie wpływa na centralność przy dodawaniu krawędzi między różnymi spójnymi składowymi.

Miara centralnośći Attachment

Miara centralności Attachment jest zdefiniowana dla każdego grafu G=(V, E) i dla każdego wierzchołka v∈V jako:

$$A_v(G) = \sum_{S \subseteq V \setminus \{v\}} 2\beta(S, V)(|K(G[S])| - |K(G[S \cup \{v\}])| + 1)$$

$$\beta(S, V) = |S|!(|V| - |S| - 1)!/|V|!$$

Jeśli mielibyśmy usuwać wierzchołki z G w losowej kolejności wtedy A_v(G) jest równe oczekiwanej liczbie spójnych utworzonych po usunięciu v, pomnożonej przez 2, by zachować normalizację.

Miara Attachment a wartość Shapleya

$$SV_v(f) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{v\}} \beta(S, N)(f(S \cup \{v\}) - f(S))$$

$$A_v(G) = \sum_{S \subseteq V \setminus \{v\}} 2\beta(S, V)(|K(G[S])| - |K(G[S \cup \{v\}])| + 1)$$

Porównując wzór na wartość Shapleya i miarę Attachment widać że:

$$A_v(G) = SV_v(f_G^*)$$
$$f_G^*(S) = \sum_{C \in K(G[S])} 2(|C| - 1)$$

a więc

$$A_v(G) = MV_v(f^*, G))$$
$$f^*(S) = 2(|S| - 1)$$

Miara Attachment spełnia aksjomaty lokalności, normalizacji, uczciwości i gain-loss i jest jedyną taką miarą.

Własności wartości Myersona

Wartość Myersona jest jedyną funkcją która dla danej gry (V, f) posiada:

Własność uczciwości, zdefiniowaną jak wcześniej

Własność efektywności składowych (Component Efficiency) zdefiniowaną w następujący sposób:

Dla gry (V, f) i dla każdego grafu G i dla każdej spójnej składowej $C \in K(G)$

$$\sum_{v \in C} \varphi_v(G) = F(C)$$

Attachment: aksjomaty uczciwości i gain-loss

Korzystając z tego że miara Attachment jest równoważna wartości Myersona dla pewnego grafu komunikacji i funkcji charakterystycznej wiemy że miara Attachment spełnia aksjomat uczciwości.

Dalej wiemy że dla każdego grafu G i dla każdej spójnej składowej C∈K(G)

$$\sum_{v \in C} A_v(G) = 2(|C| - 1)$$

Widać stąd że dodawanie krawędzi między wierzchołkami wewnątrz jednej spójnej składowej nie wpływa na sumę miar Attachment w tej spójnej, co spełnia aksjomat gain-loss.

Attachment: aksjomat normalizacji

Dla grafu G=(V, E) i każdego v∈V:

- Gdy v jest izolowany, sam tworzy swoją spójną składową czyli $A_v(G) = 0$
- Gdy G jest gwiazdą i v jest jej środkiem, dla każdego S ⊆ V \ {v}, G[S] składa się z |S| spójnych składowych, a G[S ∪ {v}] ma jedną spójną składową, więc:

$$|K(G[S])| - |K(G[S \cup \{v\}])| + 1 = |S|$$

$$A_v(G) = \sum_{S \subseteq V \setminus \{v\}} 2\beta(S,V)|S| = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{2s}{n} = \sum_{s=0}^{n-1} = n - 1$$

- Na koniec $A_v(G)$∈[0, n-1], ponieważ marginalny wkład pojedynczego wierzchołka będzie zawsze w zakresie [0, |S|] więc jak widać w poprzednich punktach miara Attachment pojedynczego wierzchołka mieści się w [0, n-1]

Attachment: aksjomat lokalności

Oznaczmy przez $mc_v^*(S)$ wkład marginalny v do S.
Jest to podwojona liczba spójnych składowych S, które są łączone przez v.
Na tą wartość nie mają wpływu wierzchołki leżące poza $K_v(G)$ więc dla każdego $S \subseteq V \setminus \{v\}$ $mc_v^*(S) = mc_v^*(S \cap K_v(G)))$
więc można zapisać wzór na miarę Attachment jako:

$$A_v(G) = \sum_{P \subseteq V \setminus K_v(G))} \sum_{S \subseteq K_v(G) \setminus \{v\}} \beta(S \cup P, V) mc_v^*(S)$$

a dla każdego $S \subseteq K_v(G)$ $\sum_{P \subseteq V \setminus K_v(G))} \beta(S \cup P, V) = \beta(S, K_v(G))$

dzięki czemu mamy $A_v(G) = A_v(G[K_v(G)])$

Unikalność miary Attachment jako spełniającej te aksjomaty

Weźmy dowolną miarę centralności F, spełniającą te aksjomaty, G=(V, E), gwiazdę, której środkiem jest wierzchołek v i u dowolny wierzchołek w V \ {v}.
Z normalizacji wiemy, że $F_v(G) = n - 1$.
Następnie weźmy $G'=(V, E \setminus \{\{v, u\}\})$, w takim grafie $F_u(G) = 0$, a z lokalności $F_v(G') = F_v(G'[V \setminus \{u\}]) = n - 2$.
Korzystając z aksjomatu uczciwości $F_u(G) = F_u(G') + (F_v(G) - F_v(G')) = 1$.

Zatem wiedząc, że wierzchołek u został wybrany dowolnie z V \ {v}, każdy wierzchołek z tego zbioru ma miarę 1. Korzystając z tego wiemy że suma miar F w gwieździe jest równa 2(n - 1)

Unikalność miary Attachment jako spełniającej te aksjomaty

Każdy graf spójny można uzyskać dodając lub usuwając krawędzie z gwiazdy, więc korzystając z aksjomatu gain-loss wiemy, że suma miar w każdym spójnym grafie jest równa 2(n - 1), a z lokalności wiemy, że suma miar w każdej spójnej składowej grafu S jest równa 2(|S| - 1).

Taka miara spełnia własność efektywności składowych $\sum_{v \in C} \varphi_v(G) = F(C)$

Spełnia ona również zgodnie z założeniem aksjomat uczciwości, a zatem korzystając z własności wartości Myersona jest ona unikalna.

Aksjomatyzacja miary Degree

Miara Degree jest jedną miarą spełniającą aksjomaty lokalności, normalizacji, uczciwości, i monotoniczności.

Z tego twierdzenia i unikalności miary Attachment, jako spełniającej swój zbiór aksjomatów, wynika że nie istnieje miara centralności spełniająca wszystkie pięć aksjomatów.

Własności miary Attachment

Niech G będzie grafem spójnym i niech v będzie wierzchołkiem, którego usunięcie spowoduje rozpad G na k rozłącznych spójnych składowych, zawierających zbiory wierzchołków: C_1, C_2,...,C_k, wtedy:

$$A_v(G) = \sum_{i\in\{1,\ldots,k\}} A_v(G[C_i \cup \{v\}])$$

Dodatkowo dla każdego i∈{1,...,k} i dla każdego u∈C_i:

$$A_u(G) = A_u(G[C_i \cup \{v\}])$$

Własności miary Attachment

Usunięcie mostu zmniejsza miarę Attachment obu wierzchołków mostu o 1 i nie wpływa na miarę Attachment innych wierzchołków

Własności miary Attachment

Niech G będzie grafem spójnym jeśli K $\subseteq$ G tworzy klikę w G, której usunięcie spowoduje rozpad G na k rozłącznych spójnych składowych, zawierających zbiory wierzchołków: C_1, C_2,...,C_k, wtedy dla każdego $v \in K$:

$$A_v(G) = \sum_{i \in \{1,\ldots,k\}} A_v(G[C_i \cup K]) - (k-1)A_v(G[K])$$

Dodatkowo dla każdego $i \in \{1,\ldots,k\}$ i dla każdego $u \in C_i$:

$$A_u(G) = A_u(G[C_i \cup K])$$

Własności miary Attachment

Miara Attachment liścia jest równa 1, a usunięcie liścia zmniejsza miarę Attachment jego sąsiada o 1 i nie wpływa na miarę Attachment pozostałych wierzchołków

Własności miary Attachment

Jeśli zbiór K sąsiadów wierzchołka v tworzy klikę, miara Attachment wierzchołka v jest równa: $\frac{2|K|}{|K|+1}$

Dodatkowo, usunięcie v zmniejsza miarę Attachment jego sąsiadów o $\frac{2}{|K|(|K|+1)}$ i nie wpływa na miarę innych wierzchołków grafu.

Zastosowanie

Miara Attachment została zastosowana do analizy sieci terrorystycznej odpowiedzialnej za przeprowadzenie ataku terrorystycznego w 2004 w Madrycie.

Ta sieć zawiera 70 wierzchołków i 243 krawędzie.

Obliczenie wartości Myersona dla rzadkiej sieci z 36 wierzchołkami zajmowało ponad 100 sekund w momencie powstania pracy, a czas wykonania algorytmu rośnie wykładniczo wraz z rozmiarem sieci.

Zastosowanie

Możemy łatwo obliczyć miarę Attachment wierzchołków izolowanych i możemy je usunąć z sieci nie wpływając wyniki dla pozostałych wierzchołków.

Następnie można usunąć liście, korzystając z tego że ich miara Attachment to 1 i tego że, ich usunięcie zmniejszy miarę ich sąsiadów o 1.

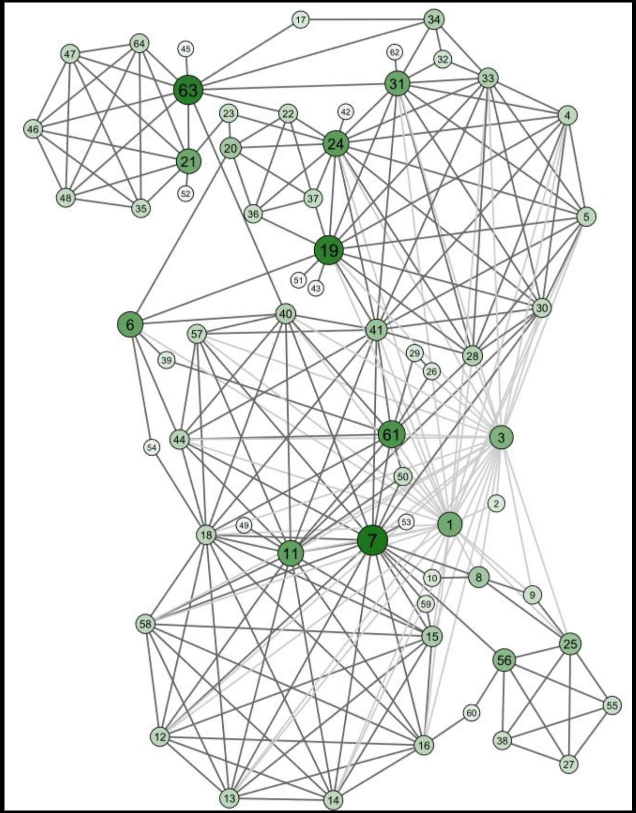
Analogicznie możemy usunąć wierzchołki, których sąsiedzi tworzą klikę.

Można powtarzać te kroki do momentu aż dalsze uproszczenie sieci nie będzie już możliwe

Algorithm 1: Algorithm for the Attachment Centrality

Input: Graph $G = (V, E)$
Output: Attachment Centrality A_v for every $v \in V$

find the simple elimination ordering π;
create a cut-clique decomposition T *of graph* G *from* π;
$f \leftarrow$ *function defined as* $f(C) = 2(|C| - 1)$;
$t \leftarrow$ *root of* T;
while t *has children* **do**
  $(l, r) \leftarrow$ *children of* t *(left one without children)*;
  $(L, R) \leftarrow$ *labels of* l, r;
  $K \leftarrow L \cap R$;
  foreach $v \in L$ **do**
    calculate $MV_v(f, G[L])$;
    $A_v \leftarrow A_v + MV_v(f, G[L])$;
    if $v \in K$ **then** $A_v \leftarrow A_v - 2 + \frac{2}{|K|}$;
  $t \leftarrow r$;
return A_v *for every* $v \in V$;



Rank	A_v		B_v	C_v	D_v
1^{st}	7	(Imad Eddin Barakat)	63	1	1
2^{nd}	63	(Semaan Gaby Eid)	1	3	3
3^{rd}	19	(Abderrahim Zbakh)	3	41	7
4^{th}	61	(Mohamed El Egipcio)	40	7	11
5^{th}	24	(Naima Oulad Akcha)	7	31	41
6^{th}	11	(Amer Azizi)	31	40	18
7^{th}	6	(Mohamed Chedadi)	24	24	24

Czas działania algorytmu na tej sieci to: 15.01s na standardowym komputerze.

Największy podgraf dla którego trzeba było policzyć wartość Myersona bez dalszych uproszczeń miał 26 wierzchołków.

Prezentacja przygotowana na podstawie pracy:
Attachment Centrality: An Axiomatic Approach to Connectivity in Networks
(Skibski, Rahwan, Michalak, Yokoo)