Kryteria proporcjonalności w metodach głosowania przez aprobaty

Głosowanie przez aprobaty

$(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$
$\mathrm{k} \in \mathrm{N}$ liczba miejsc w komitecie
$\mathrm{C} = (\mathrm{C}_1 .. \mathrm{C}_\mathrm{m})$ zbiór m kandydatów
$\mathrm{V} = (\mathrm{V}_1 .. \mathrm{V}_\mathrm{n})$ zbiór n głosujących
$\mathbf{A} = (\mathrm{A}_1 .. \mathrm{A}_\mathrm{n})$ lista n zbiorów kandydatów
aprobowanych przez kolejnych wyborców

Głosowanie przez aprobaty

$(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$
$\mathrm{k} \in \mathrm{N}$ liczba miejsc w komitecie
$\mathrm{C} = (\mathrm{C}_1 .. \mathrm{C}_\mathrm{m})$ zbiór m kandydatów
$\mathrm{V} = (\mathrm{V}_1 .. \mathrm{V}_\mathrm{n})$ zbiór n głosujących
$\mathbf{A} = (\mathrm{A}_1 .. \mathrm{A}_\mathrm{n})$ lista n zbiorów kandydatów aprobowanych przez kolejnych wyborców

Przykład
k = 10
C = 3 grupy R, G, B po 10 kandydatów
V = {1 .. 100}
$A_1 = \ldots = A_{60} = \{R_1 .. R_{10}\}$
$A_{61} = \ldots = A_{90} = \{G_1 .. G_{10}\}$
$A_{91} = \ldots = A_{100} = \{B_1 .. B_{10}\}$

Głosowanie przez aprobaty

$(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$
$\mathrm{k} \in \mathrm{N}$ liczba miejsc w komitecie
$\mathrm{C} = (\mathrm{C}_1 .. \mathrm{C}_\mathrm{m})$ zbiór m kandydatów
$\mathrm{V} = (\mathrm{V}_1 .. \mathrm{V}_\mathrm{n})$ zbiór n głosujących
$\mathbf{A} = (\mathrm{A}_1 .. \mathrm{A}_\mathrm{n})$ lista n zbiorów kandydatów aprobowanych przez kolejnych wyborców

Przykład
k = 10
C = 3 grupy R, G, B po 10 kandydatów
V = {1 .. 10}
$A_1 = \ ... = A_6 = \{R_1 .. R_{10}\}$
$A_7 = \ ... = A_9 = \{G_1 .. G_{10}\}$
$A_{10} = \{B_1 .. B_{10}\}$

	$\mathbf{V_1, V_2 \dots V_6}$	$\mathbf{V_7, V_8, V_9}$	$\mathbf{V_{10}}$
$\mathbf{R_1}$	X		
$\mathbf{R_2 \dots R_{10}}$	X		
$\mathbf{G_1}$		X	
$\boldsymbol{G_2 \dots G_{10}}$		X	
$\mathbf{B_1}$			X
$\boldsymbol{B_2 \dots B_{10}}$			X

Approval Voting - naiwnie

k = 10
C = 3 grupy R, G, B po 10 kandydatów
V = {1 .. 10}
$A_1 = \ \dots = A_6 = \{R_1 \, .. \, R_{10}\}$
$A_7 = \ \dots = A_9 = \{G_1 \, .. \, G_{10}\}$
$A_{10} = \{B_1 \, .. \, B_{10}\}$

Wybieramy najbardziej popularnych kandydatów w kolejności liczby aprobujących ich wyborców.

	$\mathbf{V_1, V_2 \dots V_6}$	$\mathbf{V_7, V_8, V_9}$	$\mathbf{V_{10}}$
$\mathbf{R_1}$	X		
$\mathbf{R_2 \dots R_{10}}$	X		
$\mathbf{G_1}$		X	
$\boldsymbol{G_2 \dots G_{10}}$		X	
$\mathbf{B_1}$			X
$\boldsymbol{B_2 \dots B_{10}}$			X

Approval Voting - naiwnie

k = 10
C = 3 grupy R, G, B po 10 kandydatów
V = {1 .. 10}
$A_1 = \ldots = A_6 = \{R_1 \ldots R_{10}\}$
$A_7 = \ldots = A_9 = \{G_1 \ldots G_{10}\}$
$A_{10} = \{B_1 \ldots B_{10}\}$

Wybieramy najbardziej popularnych kandydatów w kolejności liczby aprobujących ich wyborców.

$\text{Score}(R_i) = 6$
$\text{Score}(G_i) = 3$
$\text{Score}(B_i) = 1$

zwycięski komitet W = $\{R_1 \ldots R_{10}\}$

	$V_1, V_2 \ldots V_6$	V_7, V_8, V_9	V_{10}
R_1	X		
$R_2 \ldots R_{10}$	X		
G_1		X	
$G_2 \ldots G_{10}$		X	
B_1			X
$B_2 \ldots B_{10}$			X

Approval Voting - naiwnie

k = 10
C = 3 grupy R, G, B po 10 kandydatów
V = {1 .. 10}
$A_1 = \ \dots = A_6 = \{R_1 \,..\, R_{10}\}$
$A_7 = \ \dots = A_9 = \{G_1 \,..\, G_{10}\}$
$A_{10} = \{B_1 \,..\, B_{10}\}$

Wybieramy najbardziej popularnych kandydatów w kolejności liczby aprobujących ich wyborców.

Score$(R_i) = 6$
Score$(G_i) = 3$
Score$(B_i) = 1$

zwycięski komitet W = $\{R_1 .. R_{10}\}$

	$V_1, V_2 \dots V_6$	V_7, V_8, V_9	V_{10}
R_1	X		
$R_2 \dots R_{10}$	X		
G_1		X	
$G_2 \dots G_{10}$		X	
B_1			X
$B_2 \dots B_{10}$			X

strong Justified Representation (sJR)

Dla wyborów $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, wynik $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{C}$, $|\mathrm{W}| = \mathrm{k}$ spełnia kryterium sJR wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}} \left(|\mathrm{V}'| \geq \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}} \land \bigcap_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} \mathrm{A_i} \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{W} \cap \left(\bigcap_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} \mathrm{A_i} \right) \neq \emptyset \right)$$

strong Justified Representation (sJR)

Dla wyborów $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, wynik $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{C}$, $|\mathrm{W}| = \mathrm{k}$ spełnia kryterium sJR wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}} \left(|\mathrm{V}'| \geq \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}} \wedge \bigcap_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} \mathrm{A_i} \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{W} \cap \left(\bigcap_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} \mathrm{A_i} \right) \neq \emptyset \right)$$

- Grupa wyborców stanowiąca przynajmniej $\frac{1}{k}$ wszystkich wyborców, mająca przynajmniej jednego wspólnie aprobowanego kandydata.

strong Justified Representation (sJR)

Dla wyborów $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, wynik $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{C}$, $|\mathrm{W}| = \mathrm{k}$ spełnia kryterium sJR wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}} \left(|\mathrm{V}'| \geq \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}} \wedge \bigcap_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} \mathrm{A}_\mathrm{i} \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{W} \cap \left(\bigcap_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} \mathrm{A}_\mathrm{i} \right) \neq \emptyset \right)$$

- Grupa wyborców stanowiąca przynajmniej $\frac{1}{k}$ wszystkich wyborców, mająca przynajmniej jednego wspólnie aprobowanego kandydata.
- Przynajmniej jeden kandydatów aprobowanych przez wszystkich w V' jest częścią zwycięskiego komitetu.

strong Justified Representation (sJR)

k = 3

Dla dowolnego kandydata $X \in \{A, B, C, D\}$, istnieje $\frac{|V|}{k} = \frac{9}{3} = 3$ wyborców i, j, k takich że $A_i \cap A_j \cap A_k = \{X\}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X	X	X						
B			X	X	X				
C					X	X	X		
D							X	X	X

strong Justified Representation (sJR)

k = 3
Dla dowolnego kandydata $X \in \{A, B, C, D\}$, istnieje $\frac{|V|}{k} = \frac{9}{3} = 3$ wyborców i, j, k takich że $A_i \cap A_j \cap A_k = \{X\}$.

W związku z tym jakikolwiek komitet zwycięski musiałby zawierać każde X, ale mamy 4 kandydatów i 3 miejsca w komitecie, więc sJR jest niespełnialne.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X	X	X						
B			X	X	X				
C					X	X	X		
D							X	X	X

semi-strong Justified Representation (ssJR)

Dla wyborów $(V, C, \boldsymbol{A}, k)$, wynik $W \subseteq C$, $|W| = k$ spełnia kryterium ssJR wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{V' \subseteq V} \left(|V'| \geq \frac{|V|}{k} \wedge \bigcap_{i \in V'} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall_{i \in V'} W \cap A_i \neq \emptyset \right)$$

semi-strong Justified Representation (ssJR)

Dla wyborów $(V, C, \boldsymbol{A}, k)$, wynik $W \subseteq C$, $|W| = k$ spełnia kryterium ssJR wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{V' \subseteq V} \left(|V'| \geq \frac{|V|}{k} \wedge \bigcap_{i \in V'} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall_{i \in V'} W \cap A_i \neq \emptyset \right)$$

- Grupa wyborców stanowiąca przynajmniej $\frac{1}{k}$ wszystkich wyborców, mająca przynajmniej jednego wspólnie aprobowanego kandydata.

semi-strong Justified Representation (ssJR)

Dla wyborów $(V, C, \boldsymbol{A}, k)$, wynik $W \subseteq C$, $|W| = k$ spełnia kryterium ssJR wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{V' \subseteq V} \left(|V'| \geq \frac{|V|}{k} \wedge \bigcap_{i \in V'} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall_{i \in V'} W \cap A_i \neq \emptyset \right)$$

- Grupa wyborców stanowiąca przynajmniej $\frac{1}{k}$ wszystkich wyborców, mająca przynajmniej jednego wspólnie aprobowanego kandydata.
- Dla każdego wyborcy z tej grupy, przynajmniej jeden (niekoniecznie ten sam) kandydat jest w zwycięskim komitecie.

semi-strong Justified Representation (ssJR)

k = 3
Dla dowolnego kandydata $X \in \{A, B, C, D\}$, istnieje $\frac{|V|}{k} = \frac{9}{3} = 3$ wyborców $i < j < k$ takich że $A_i \cap A_j \cap A_k = \{X\} = A_j$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X	X	X						
B			X	X	X				
C					X	X	X		
D							X	X	X

semi-strong Justified Representation (ssJR)

k = 3
Dla dowolnego kandydata $X \in \{A, B, C, D\}$, istnieje $\frac{|V|}{k} = \frac{9}{3} = 3$ wyborców $i < j < k$ takich że $A_i \cap A_j \cap A_k = \{X\} = A_j$.

W związku z tym jakikolwiek komitet zwycięski musiałby zawierać każde X, ale mamy 4 kandydatów i 3 miejsca w komitecie, więc sJR jest niespełnialne.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	X	X	X						
B			X	X	X				
C					X	X	X		
D							X	X	X

Justified Representation (JR)

Dla wyborów $(V, C, \boldsymbol{A}, k)$, wynik $W \subseteq C$, $|W| = k$ spełnia kryterium JR wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{V' \subseteq V} \left(|V'| \geq \frac{|V|}{k} \wedge \bigcap_{i \in V'} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists_{i \in V'} W \cap A_i \neq \emptyset \right)$$

Justified Representation (JR)

Dla wyborów $(V, C, \boldsymbol{A}, k)$, wynik $W \subseteq C$, $|W| = k$ spełnia kryterium JR wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{V' \subseteq V} \left(|V'| \geq \frac{|V|}{k} \wedge \bigcap_{i \in V'} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists_{i \in V'} W \cap A_i \neq \emptyset \right)$$

- Grupa wyborców stanowiąca przynajmniej $\frac{1}{k}$ wszystkich wyborców, mająca przynajmniej jednego wspólnie aprobowanego kandydata.

Justified Representation (JR)

Dla wyborów $(V, C, \boldsymbol{A}, k)$, wynik $W \subseteq C$, $|W| = k$ spełnia kryterium JR wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{V' \subseteq V} \left(|V'| \geq \frac{|V|}{k} \wedge \bigcap_{i \in V'} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists_{i \in V'} W \cap A_i \neq \emptyset \right)$$

- Grupa wyborców stanowiąca przynajmniej $\frac{1}{k}$ wszystkich wyborców, mająca przynajmniej jednego wspólnie aprobowanego kandydata.
- Przynajmniej jeden wyborca z tej grupy aprobuje przynajmniej jednego kandydata w zwycięskim komitecie.

Proportional Approval Voting

Dla wyborów $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, wybieramy taki komitet $W \subseteq C, |W| = k$, że maksymalna jest suma:

$$\sum_{i \in V} H(|A_i \cap W|)$$

gdzie $H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \ \ldots + \frac{1}{n}$.

Proportional Approval Voting

k = 10
C = 3 grupy R, G, B po 10 kandydatów
V = {1 .. 10}
$A_1 = \ \dots = A_6 = \{R_1 \,..\, R_{10}\}$
$A_7 = \ \dots = A_9 = \{G_1 \,..\, G_{10}\},\ A_{10} = \{B_1 \,..\, B_{10}\}$

	$\mathbf{V_1, V_2 \dots V_6}$	$\mathbf{V_7, V_8, V_9}$	$\mathbf{V_{10}}$
$\mathbf{R_1}$	X		
$\mathbf{R_2 \dots R_{10}}$	X		
$\mathbf{G_1}$		X	
$\boldsymbol{G_2 \dots G_{10}}$		X	
$\mathbf{B_1}$			X
$\boldsymbol{B_2 \dots B_{10}}$			X

Proportional Approval Voting

k = 10
C = 3 grupy R, G, B po 10 kandydatów
V = {1 .. 10}
$A_1 = \ \dots = A_6 = \{R_1 \, .. \, R_{10}\}$
$A_7 = \ \dots = A_9 = \{G_1 \, .. \, G_{10}\}, \ A_{10} = \{B_1 \, .. \, B_{10}\}$

Dla $\mathrm{W} = 6 \text{ x } \mathrm{R}, 3 \text{ x } \mathrm{G}, 1 \text{ x } \mathrm{B}, \mathrm{PAV}_{\mathrm{score}}(\mathrm{W}) = 21.2$

	$\mathbf{V_1, V_2 \dots V_6}$	$\mathbf{V_7, V_8, V_9}$	$\mathbf{V_{10}}$
$\mathbf{R_1}$	X		
$\mathbf{R_2 \dots R_{10}}$	X		
$\mathbf{G_1}$		X	
$\boldsymbol{G_2 \dots G_{10}}$		X	
$\mathbf{B_1}$			X
$\boldsymbol{B_2 \dots B_{10}}$			X

Proportional Approval Voting

k = 10
C = 3 grupy R, G, B po 10 kandydatów
V = {1 .. 10}
$A_1 = \ \dots = A_6 = \{R_1 \dots R_{10}\}$
$A_7 = \ \dots = A_9 = \{G_1 \dots G_{10}\},\ A_{10} = \{B_1 \dots B_{10}\}$

Dla $\mathrm{W} = 6 \text{ x R}, 3 \text{ x G}, 1 \text{ x B}, \mathrm{PAV}_{\mathrm{score}}(\mathrm{W}) = 21.2$
i jest to maksymalny możliwy wynik.

	$\mathbf{V_1, V_2 \dots V_6}$	$\mathbf{V_7, V_8, V_9}$	$\mathbf{V_{10}}$
$\mathbf{R_1}$	X		
$\mathbf{R_2 \dots R_{10}}$	X		
$\mathbf{G_1}$		X	
$\boldsymbol{G_2 \dots G_{10}}$		X	
$\mathbf{B_1}$			X
$\boldsymbol{B_2 \dots B_{10}}$			X

Proportional Approval Voting

k = 10
C = 3 grupy R, G, B po 10 kandydatów
V = {1 .. 10}
$A_1 = \ \dots = A_6 = \{R_1 \,..\, R_{10}\}$
$A_7 = \ \dots = A_9 = \{G_1 \,..\, G_{10}\},\ A_{10} = \{B_1 \,..\, B_{10}\}$

Dla $\mathrm{W} = 6\ \mathrm{x}\ \mathrm{R}, 3\ \mathrm{x}\ \mathrm{G}, 1\ \mathrm{x}\ \mathrm{B}, \mathrm{PAV}_{score}(\mathrm{W}) = 21.2$
i jest to maksymalny możliwy wynik.

Intuicyjnie punkty z dodania / koszt usunięcia wynoszą dla kategorii kandydatów:
- R dodanie $+\frac{6}{7}$ usunięcie $-\frac{6}{6} = -1$
- G dodanie $+\frac{3}{4}$ usunięcie $-\frac{3}{3} = -1$
- B dodanie $+\frac{1}{2}$ usunięcie $-\frac{1}{1} = -1$

	$\mathbf{V_1, V_2 \dots V_6}$	$\mathbf{V_7, V_8, V_9}$	$\mathbf{V_{10}}$
$\mathbf{R_1}$	X		
$\mathbf{R_2 \dots R_{10}}$	X		
$\mathbf{G_1}$		X	
$\boldsymbol{G_2 \dots G_{10}}$		X	
$\mathbf{B_1}$			X
$\boldsymbol{B_2 \dots B_{10}}$			X

PAV spełnia JR

Weźmy wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$ i niech $s = \left\lceil \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}} \right\rceil$, a W będzie wynikiem PAV na tych wyborach. Dla każdego kandydata $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$, zdefiniujmy $\mathrm{m(w)} = \mathrm{PAV_{score}(W)} - \mathrm{PAV_{score}}(\mathrm{W} - \{\mathrm{w}\})$. Niech $\mathrm{m(W)} = \sum_{\mathrm{w} \in \mathrm{W}} \mathrm{m(w)}$.

Załóżmy że istnieje $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}, |\mathrm{V}'| \geq s, \bigcap_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} \mathrm{A_i} \neq \emptyset, \exists_{\mathrm{i} \in \mathrm{V}'} \mathrm{W} \cap \mathrm{A_i} = \emptyset$. Niech $\mathrm{c} \in \mathrm{C} - \mathrm{W}$, będzie kandydatem aprobowanym przez wszystkich wyborców z V'. Zauważmy że po dodaniu c do W, wynik wzrósłby o przynajmniej s.

Wystarczy wykazać że istnieje kandydat $\mathrm{p} \in \mathrm{W}$, taki że $\mathrm{m(p)} < \mathrm{s}$. To by oznaczało że zamienienie p z c zwiększyłoby wynik, co daje sprzeczność.

Weźmy $\mathrm{V}'' = \mathrm{V} - \mathrm{V}', |\mathrm{V}''| \leq |\mathrm{V}| - \mathrm{s} \leq \mathrm{s(k} - 1)$. Dla dowolnego $\mathrm{i} \in \mathrm{V}'', \mathrm{x} = |\mathrm{A_i} \cap \mathrm{W}|$.
Jeśli $\mathrm{x} > 0$, wyborca i zwiększa $\mathrm{m(w)}$ dla każdego $\mathrm{w} \in \mathrm{A_i} \cap \mathrm{W}$ dokładnie o $\frac{1}{\mathrm{x}}$, więc całe $\mathrm{m(W)}$ o 1.
Stąd mamy $\mathrm{m(W)} \leq |\mathrm{V}''| \leq \mathrm{s(k} - 1)$, więc z zasady szufladkowej, musi istnieć kandydat p.

Extended Justified Representation (EJR)

Niech $k = 3, C = \{a, b, c, d\}, V = \{1..100\}, A_1 = \{a\}, A_2 = \{b\}, A_{i>2} = \{c, d\}$. JR jest spełniane wynikami $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$, ale ewidentnie pierwsze dwa są bardzo nie-proporcjonalne. Czy można jakoś wzmonić JR, żeby uzyskać bardziej proporcjonalne kryterium?

Extended Justified Representation (EJR)

Mając dane wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, zwycięski komitet $W \subseteq C$, $|W| = k$, oraz liczbę całkowitą q, mówimy że W zapewnia q-uzasadnioną reprezentację (q-JR), jeśli nie istnieje taki podzbiór wyborców $V' \subseteq V, |V'| \geq q \ * \frac{|V|}{k}$, że $|\bigcap_{i \in V'} A_i| \geq q$ ale $|A_i \cap W| < q$ dla każdego $i \in V'$.

Extended Justified Representation (EJR)

Mając dane wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, zwycięski komitet $W \subseteq C$, $|W| = k$, oraz liczbę całkowitą q, mówimy że W zapewnia q-uzasadnioną reprezentację (q-JR), jeśli nie istnieje taki podzbiór wyborców $V' \subseteq V, |V'| \geq q \; * \; \frac{|V|}{k}$, że $|\bigcap_{i \in V'} A_i| \geq q$ ale $|A_i \cap W| < q$ dla każdego $i \in V'$.

Co to znaczy?
Dla każdej grupy wyborców, która zgadza się przynajmniej co do q kandydatów i stanowi co najmniej $\frac{q}{k}$ wszystkich wyborców, przynajmniej jeden jej członek musi aprobować przynajmniej q zwycięzców.

Extended Justified Representation (EJR)

Mając dane wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, zwycięski komitet $W \subseteq C$, $|W| = k$, oraz liczbę całkowitą q, mówimy że W zapewnia q-uzasadnioną reprezentację (q-JR), jeśli nie istnieje taki podzbiór wyborców $V' \subseteq V, |V'| \geq q\ *\ \frac{|V|}{k}$, że $|\bigcap_{i \in V'} A_i| \geq q$ ale $|A_i \cap W| < q$ dla każdego $i \in V'$.

Co to znaczy?
Dla każdej grupy wyborców, która zgadza się przynajmniej co do q kandydatów i stanowi co najmniej $\frac{q}{k}$ wszystkich wyborców, przynajmniej jeden jej członek musi aprobować przynajmniej q zwycięzców.

Metoda spełnia EJR wtedy, kiedy dla każdych wyborów $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, zwycięski komitet W spełnia q-JR dla wszystkich $1 \leq \mathrm{q} \leq \mathrm{k}$.

PAV spełnia EJR

Załóżmy że pewna instancja PAV nie spełnia EJR. Weźmy wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, zwycięski komitet $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{C}$, $|\mathrm{W}| = \mathrm{k}$, liczbę całkowitą q, oraz $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$, $|\mathrm{V}'| = s \geq \mathrm{q} \cdot \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}}$. Wiemy że istnieje kandydat c aprobowany przez całe V' nie należący do W. Każdy wyborca z V' ma co najwyżej q – 1 przedstawicieli w W, więc $\mathrm{m}(\mathrm{c}) \geq \mathrm{s} \cdot \frac{1}{\mathrm{q}} \geq \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}}$.

PAV spełnia EJR

Załóżmy że pewna instancja PAV nie spełnia EJR. Weźmy wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, zwycięski komitet $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{C}$, $|\mathrm{W}| = \mathrm{k}$, liczbę całkowitą q, oraz $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$, $|\mathrm{V}'| = s \geq \mathrm{q} \cdot \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}}$. Wiemy że istnieje kandydat c aprobowany przez całe V' nie należący do W. Każdy wyborca z V' ma co najwyżej q – 1 przedstawicieli w W, więc $\mathrm{m}(\mathrm{c}) \geq \mathrm{s} \cdot \frac{1}{\mathrm{q}} \geq \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}}$.
Weźmy kandydata $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$ z najmniejszym $\mathrm{m}(\mathrm{w})$. Mamy $\mathrm{m}(\mathrm{w}) \leq \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$. Jeśli $\mathrm{m}(\mathrm{w}) < \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$, mamy sprzeczność bo możemy zamienić w z c. Więc $\mathrm{m}(\mathrm{w}) = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$, w dodatku zachodzi to dla każdego kandydata z W. Skoro PAV spełnia JR, wiemy że dla pewnego wyborcy z V', ten wyborca aprobuje kandydata $\mathrm{d} \in \mathrm{W}$. Niech $\mathrm{W}' = ((\mathrm{W} - \{\mathrm{d}\}) \cup \{\mathrm{c}\})$.

PAV spełnia EJR

Załóżmy że pewna instancja PAV nie spełnia EJR. Weźmy wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, zwycięski komitet $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{C}$, $|\mathrm{W}| = \mathrm{k}$, liczbę całkowitą q, oraz $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$, $|\mathrm{V}'| = s \geq \mathrm{q} \cdot \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}}$. Wiemy że istnieje kandydat c aprobowany przez całe V' nie należący do W. Każdy wyborca z V' ma co najwyżej q – 1 przedstawicieli w W, więc $\mathrm{m}(\mathrm{c}) \geq \mathrm{s} \cdot \frac{1}{\mathrm{q}} \geq \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}}$.

Weźmy kandydata $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$ z najmniejszym $\mathrm{m}(\mathrm{w})$. Mamy $\mathrm{m}(\mathrm{w}) \leq \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$. Jeśli $\mathrm{m}(\mathrm{w}) < \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$, mamy sprzeczność bo możemy zamienić w z c. Więc $\mathrm{m}(\mathrm{w}) = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$, w dodatku zachodzi to dla każdego kandydata z W. Skoro PAV spełnia JR, wiemy że dla pewnego wyborcy z V', ten wyborca aprobuje kandydata $\mathrm{d} \in \mathrm{W}$. Niech $\mathrm{W}' = ((\mathrm{W} - \{\mathrm{d}\}) \cup \{\mathrm{c}\})$. Taka zamiana zmienia wynik $\mathrm{PAV}_{\mathrm{score}}$ o przynajmniej $(s - 1) \cdot \frac{1}{\mathrm{q}} + \frac{1}{\mathrm{q} - 1} - \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} > 0$, co daje sprzeczność.

PAV spełnia EJR

Załóżmy że pewna instancja PAV nie spełnia EJR. Weźmy wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{k})$, zwycięski komitet $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{C}$, $|\mathrm{W}| = \mathrm{k}$, liczbę całkowitą q, oraz $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$, $|\mathrm{V}'| = \mathrm{s} \geq \mathrm{q} \cdot \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}}$. Wiemy że istnieje kandydat c aprobowany przez całe V' nie należący do W. Każdy wyborca z V' ma co najwyżej q – 1 przedstawicieli w W, więc $\mathrm{m}(\mathrm{c}) \geq \mathrm{s} \cdot \frac{1}{\mathrm{q}} \geq \frac{|\mathrm{V}|}{\mathrm{k}}$.

Weźmy kandydata $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$ z najmniejszym $\mathrm{m}(\mathrm{w})$. Mamy $\mathrm{m}(\mathrm{w}) \leq \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$. Jeśli $\mathrm{m}(\mathrm{w}) < \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$, mamy sprzeczność bo możemy zamienić w z c. Więc $\mathrm{m}(\mathrm{w}) = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$, w dodatku zachodzi to dla każdego kandydata z W. Skoro PAV spełnia JR, wiemy że dla pewnego wyborcy z V', ten wyborca aprobuje kandydata $\mathrm{d} \in \mathrm{W}$. Niech $\mathrm{W}' = ((\mathrm{W} - \{\mathrm{d}\}) \cup \{\mathrm{c}\})$. Taka zamiana zmienia wynik $\mathrm{PAV}_{\mathrm{score}}$ o przynajmniej $(\mathrm{s} - 1) \cdot \frac{1}{\mathrm{q}} + \frac{1}{\mathrm{q} - 1} - \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} > 0$, co daje sprzeczność.

- s – 1 wyborców z V' dostaje q-tego kandydata
- Wyborca i dostaje (q-1)-ego kandydata
- Usuwamy kandydata d

Rozszerzenie modelu wyborów

$(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \{\mathrm{u_i}\}_{\mathrm{i} \in V}, \mathrm{b}, \mathrm{cost})$

$\mathrm{b} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	budżet
$\mathrm{C} = (\mathrm{C_1} .. \mathrm{C_m})$	zbiór m kandydatów
$\mathrm{V} = (\mathrm{V_1} .. \mathrm{V_n})$	zbiór n głosujących
$u_i : C \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$	funkcja użyteczności kandydatów dla wyborców
$\mathrm{cost} : \mathrm{C} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$	funkcja kosztu kandydatów

Zwycięski komitet W, podlega ograniczeniu:

$$cost(W) = \sum_{c \in W} cost(c) \leq b$$

EJR dla wyborów z budżetem

Mając dane wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \{\mathrm{u_i}\}_{\mathrm{i} \in V}, \mathrm{b}, \mathrm{cost})$, $\alpha: \mathrm{C} \rightarrow [0, 1]$, $\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{C}$ grupa wyborców $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$ jest (α, Q)-spójna, jeśli $\frac{|\mathrm{V}'|}{|\mathrm{V}|} \geq \frac{\mathrm{cost(Q)}}{\mathrm{b}}$, oraz $\forall_{i \in V'} \forall_{c \in Q}\ u_i(c) \geq \alpha(c)$.

Oznacza to że dla takiej grupy, Q jest zbiorem takich projektów, że:
- sumaryczny koszt projektów z Q nie przekracza proporcji budżetu danej grupy względem jej liczebności.
- α oznacza minimalny poziom użyteczności danego projektu dla każdego z wyborców jaki jest potrzebny żeby uznać grupę za spójną.

EJR dla wyborów z budżetem

Mając dane wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \{\mathrm{u_i}\}_{\mathrm{i} \in V}, \mathrm{b}, \mathrm{cost})$, $\alpha\colon \mathrm{C} \rightarrow [0,1]$, $\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{C}$ grupa wyborców $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$ jest (α, Q)-spójna, jeśli $\frac{|\mathrm{V}'|}{|\mathrm{V}|} \geq \frac{\mathrm{cost}(\mathrm{Q})}{\mathrm{b}}$, oraz $\forall_{i \in V'} \forall_{c \in Q}\, u_i(c) \geq \alpha(c)$.

Oznacza to że dla takiej grupy, Q jest zbiorem takich projektów, że:
- sumaryczny koszt projektów z Q nie przekracza proporcji budżetu danej grupy względem jej liczebności.
- α oznacza minimalny poziom użyteczności danego projektu dla każdego z wyborców jaki jest potrzebny żeby uznać grupę za spójną.

Mówimy że reguła spełnia EJR dla wyborów z budżetem, jeśli dla każdej instancji wyborów E z wynikiem W, dla każdego $\alpha\colon \mathrm{C} \rightarrow [0,1]$, $\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{C}$ i każdej (α, Q)-spójnej podgrupy wyborców V' istnieje taki wyborca $i \in V'$, że:

$$u_i(W) \geq \sum_{c \in Q} \alpha(c)$$

Metoda równych udziałów nie spełnia EJR!

Budżet $= 3$, jeden wyborca i dwa projekty a i b, $\mathrm{cost}(\mathrm{a}) = 1, \mathrm{cost}(\mathrm{b}) = 3, \mathrm{u}_1(\mathrm{a}) = \frac{1}{2}, \mathrm{u}_1(\mathrm{b}) = 1$.

W metodzie równych udziałów wybieramy iteracyjnie projekt z najmniejszym współczynnikiem p, takim że $\sum_{i \in V} u_i(c) \cdot \min\left(\frac{b_i}{u_i(c)}, p\right) = cost(c)$, gdzie b_i to budżet wyborcy i.

W związku z tym, metoda równych udziałów wybierze projekt a, a EJR wymaga żeby wybrać b.

Metoda równych udziałów spełnia EJR*!

Mówimy że reguła spełnia EJR z dokładnością do jednego projektu dla wyborów z budżetem, jeśli dla każdej instancji wyborów E z wynikiem W, dla każdego $\mathrm{\alpha}\colon \mathrm{C} \rightarrow [0,1]$, $\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{C}$ i każdej $(\mathrm{\alpha}, \mathrm{Q})$-spójnej podgrupy wyborców V' istnieje taki wyborca $i \in V'$, że:

$$u_i(W) \geq \sum_{c \in Q} \alpha(c) \quad \vee \quad \exists_{c \in Q} u_i(W \cup \{c\}) \geq \sum_{c \in Q} \alpha(c)$$

Rozszerzenie modelu wyborów

$(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \{\mathrm{u_i}\}_{\mathrm{i} \in V}, \mathrm{b}, \mathrm{cost})$

$\mathrm{b} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$	budżet
$\mathrm{C} = (\mathrm{C_1} .. \mathrm{C_m})$	zbiór m kandydatów
$\mathrm{V} = (\mathrm{V_1} .. \mathrm{V_n})$	zbiór n głosujących
$u_i : C \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$	funkcja użyteczności kandydatów dla wyborców
$\mathrm{cost} : \mathrm{C} \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$	funkcja kosztu kandydatów

Zwycięski komitet W, podlega ograniczeniu:

$$cost(W) = \sum_{c \in W} cost(c) \leq b$$

Skąd wziąć u_i? W końcu wyborcy głosują przez aprobaty **A**, załóżmy:

$$u_i(c) = \begin{cases} \dfrac{cost(c)}{b} \ if \ c \in A_i \\ 0 \ if \ c \notin A_i \end{cases}$$

EJR dla wyborów z budżetem

Mając dane wybory $(\mathrm{V}, \mathrm{C}, \mathbf{A}, \mathrm{b}, \mathrm{cost})$, $\alpha\colon \mathrm{C} \rightarrow [0,1]$, $\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{C}$ grupa wyborców $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$ jest (α, Q)-spójna, jeśli $\frac{|\mathrm{V}'|}{|\mathrm{V}|} \geq \frac{\mathrm{cost}(\mathrm{Q})}{\mathrm{b}}$, oraz $\forall_{i \in V'} \forall_{c \in Q}\, c \in A_i \wedge \frac{cost(c)}{b} \geq \alpha(c)$.

Oznacza to że dla takiej grupy, Q jest zbiorem takich projektów, że:
- sumaryczny koszt projektów z Q nie przekracza proporcji budżetu danej grupy względem jej liczebności.
- każdy z projektów z grupy Q jest aprobowany przez wszystkich członków.
- $\alpha(c) \cdot b$ to dolne ograniczenie kosztu projektu z grupy Q.

Mówimy że reguła spełnia EJR dla wyborów z budżetem, jeśli dla każdej instancji wyborów E z wynikiem W, dla każdego $\alpha\colon \mathrm{C} \rightarrow [0,1]$, $\mathrm{Q} \subseteq \mathrm{C}$ i każdej (α, Q)-spójnej podgrupy wyborców V' istnieje taki wyborca $i \in V'$, że:

$$cost(A_i \cap W) \geq \sum_{c \in Q} \alpha(c)$$

Rozszerzenie PAV do wyborów budżetowych?

PAV maksymalizuje sumę $\sum_{i \in V} H(|A_i \cap W|)$ $H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{n}$

Rozszerzenie PAV do wyborów budżetowych?

PAV maksymalizuje sumę $\sum_{i \in V} H(|A_i \cap W|)$ $H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{n}$

k – liczba dotychczas „wziętych kandydatów”

1 – „ilość” dodanego kandydata

Spróbujmy sumę:

$$H^*(X) = \frac{cost(c_1)}{cost(c_2)} + \frac{cost(c_2)}{cost(c_1) + cost(c_2)} + \frac{cost(c_3)}{cost(c_1) + cost(c_2) + cost(c_3)} + \ldots + \frac{cost(c_n)}{\sum_{c \in X} cost(c)}$$

PAV’ maksymalizuje sumę $\sum_{i \in V} H^*(A_i \cap W)$

Rozszerzenie PAV do wyborów budżetowych?

PAV maksymalizuje sumę $\sum_{i \in V} H(|A_i \cap W|)$ $H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{n}$

k – liczba dotychczas „wziętych kandydatów"

1 – „ilość" dodanego kandydata

Spróbujmy sumę:

$$H^*(X) = \frac{cost(c_1)}{cost(c_2)} + \frac{cost(c_2)}{cost(c_1) + cost(c_2)} + \frac{cost(c_3)}{cost(c_1) + cost(c_2) + cost(c_3)} + \ldots + \frac{cost(c_n)}{\sum_{c \in X} cost(c)}$$

PAV' maksymalizuje sumę $\sum_{i \in V} H^*(A_i \cap W)$

Dla wyborów z budżetem n^3 załóżmy dwie grupy wyborców:

- grupa P, o liczebności $n^2 - 1$, z r kandydatami, każdy o koszcie r^2
- grupa Q, o liczebności 1 z r kandydatami, każdy o koszcie 1

PAV' wybierze samych kandydatów z grupy P, a EJR mówi że grupie Q należą się wszyscy ich kandydaci w zwycięskim secie.

Rozszerzenie PAV do wyborów budżetowych?

Spróbujmy PAV'', które maksymalizuje sumę $\sum_{i \in V} H\ (cost(A_i \cap W))$

Dla wyborów z budżetem n^2 załóżmy dwie grupy wyborców:
- grupa P, o liczebności $n\ -1$, z jednym kandydatem a, $cost(a) = n^2 - n\ + 1$
- grupa Q, o liczebności 1 wyborcy, z dwoma kandydatami b, c, $cost(b) = n\ - 1$, $\mathrm{cost(c) = n}$

EJR mówi tylko tyle, że grupie Q należy się projekt c, więc
jedyny dozwolony wynik wyborów to $W\ = \{c\}$,
A PAV'' wybierze {a, b}

Dziękuję za uwagę!

Bibliografia:

Aziz et al (2014) “Justified Representation in Approval-Based Committee Voting”

Peters D., Pierczyński G., and Skowron P. (2022) “Proportional Participatory Budgeting with Additive Utilities”