Gra Blotto

Algorytm znajdujący optymalne strategie

Programowanie liniowe

Programowanie liniowe

Znajdź wartościowanie zmiennych maksymalizujące wartość wyrażenia

$$c_1\boldsymbol{x_1} + c_2\boldsymbol{x_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{x_n}$$

Tak aby spełnione były ograniczenia

$$\begin{gathered}
a_{1,1}\boldsymbol{x_1} + a_{1,2}\boldsymbol{x_2} + \cdots + a_{1,n}\boldsymbol{x_n} \leq b_1 \\
a_{2,1}\boldsymbol{x_1} + a_{3,2}\boldsymbol{x_2} + \cdots + a_{2,n}\boldsymbol{x_n} \leq b_2 \\
a_{3,1}\boldsymbol{x_1} + a_{3,2}\boldsymbol{x_2} + \cdots + a_{3,n}\boldsymbol{x_n} \leq b_3 \\
\vdots \\
a_{m,1}\boldsymbol{x_1} + a_{m,2}\boldsymbol{x_2} + \cdots + a_{m,n}\boldsymbol{x_n} \leq b_m
\end{gathered}$$

$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n} \in \mathbb{R}$ — zmienne, które optymalizujemy

$a_{1,1}, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ — stałe opisujące rozwiązywany problem

pogrubione zmienne – zmienne wyliczane przez program liniowy

Programowanie liniowe

Oczywiste modyfikacje:

- Dopuszczamy równości i nierówności w drugą stronę
  $2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \geq 8$, $4\boldsymbol{x} + 8\boldsymbol{y} = 11$
- Dopuszczamy zmienne i stałe po obu stronach znaku
  $8\boldsymbol{x} \geq 3\boldsymbol{y} - 6$, $2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + 7 \leq 0$

Niemożliwe modyfikacje:

- Pozwalamy na ostre nierówności
  Niezdefiniowany wynik dla $\mathbf{max}\, \boldsymbol{x}$ $\mathbf{when}$ $\boldsymbol{x} < 0$

Gra Blotto

Gra Blotto

Jest K pól bitwy. Gracz A ma A jednostek, gracz B ma B jednostek.

Gracze jednocześnie rozmieszczają jednostki na polach bitwy, nie znając ruchu przeciwnika.

Gracz wygrywa na polu, jeżeli ustawił na nim więcej jednostek niż przeciwnik. Wygrane pole liczymy jako 1, przegrane jako -1, a remis jako 0. Wynik gracza to suma wyników ze wszystkich pól.

Każdy gracz dąży do maksymalizacji swojego wyniku.

Strategie mieszane

- Zakładamy, że przeciwnik zna naszą strategie.
- Jeżeli wybierzemy strategie bez losowości to przeciwnik może nas łatwo skontrować.
  - Dla $K = 3$, $A = 13$, $B = 10$ i strategii $(4, 4, 5)$ przeciwnik może nas pokonać wybierając $(5, 5, 0)$.
- Musimy skorzystać z losowości.

K— liczba pól bitew

A — liczba jednostek gracza A (naszych)

B — liczba jednostek gracza B (przeciwnika)

Strategie mieszane

- Strategia czysta

  Gracz gra w sposób deterministyczny
  np. $(2, 2, 2, 3)$, $(0, 0, 9)$

- Strategia mieszana

  Gracz w sposób losowy wybiera jedną strategie czystą
  np. $50\% \times (2, 3)$, $50\% \times (3, 2)$

  Gracz maksymalizuje oczekiwaną wartość wyniku

Algorytm

Zarys dowodu

- Potrzebujemy zmaksymalizować wynik gracza A u, pod warunkiem, że:
  - Nasza strategia jest poprawna
  - Przeciwnik grający optymalnie nie jest w stanie zdobyć więcej niż $-u$
- Stworzymy program liniowy o strukturze
  max $\boldsymbol{u}$ when
  $\hat{\boldsymbol{x}}$ jest poprawną strategią dla gracza A
  maksymalny wynik gracza B, jeżeli A gra wg. $\hat{\boldsymbol{x}} \leq -\boldsymbol{u}$

Poprawność strategii

Reprezentacja strategii

- Strategia czysta

  Dla każdego pola trzymamy liczbę jednostek, które gracz tam postawi.

$$[x_1, x_2, \dots, x_K]$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_K = N$$

- Strategia mieszana

  Trzymamy pary prawdopodobieństwo i strategia czysta.

$$[(p_1, \hat{x}_1), \dots, (p_n, \hat{x}_n)]$$
$$p_1 + \cdots p_n = 1$$

- Problem

  Strategia mieszana może składać się z $\binom{N+K-1}{K}$ strategii prostych.

K – liczba pól

N – liczba jednostek gracza

$\hat{x}$ – strategia gracza

Reprezentacja strategii

- Obserwacja

  Do wyliczenia wyniku wystarczy dla każdego pola znać rozkład prawdopodobieństwa liczby jednostek postawiony przez A i B.

- Reprezentacja

  Trzymamy macierz $\hat{x} \in \mathbb{R}^{K \times (N+1)}$. Dla każdego pola k i liczby jednostek n trzymamy $\hat{x}_{k,n}$ – prawdopodobieństwo, że gracz postawi n jednostek na polu k.

- Problem

  Trudno zweryfikować czy dana reprezentacja odpowiada poprawnej strategii.

  Np. dla $K = 3$, $N = 3$:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

K – liczba pól

N – liczba jednostek gracza

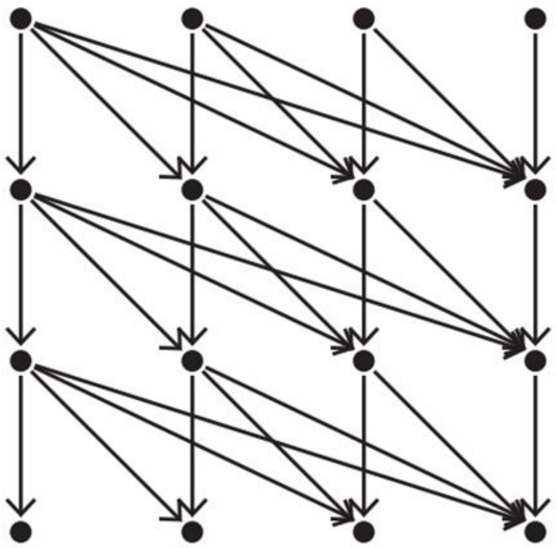
$\hat{x}$ – strategia gracza

$\hat{x}_{k,n}$ – prawdopodobieństwo, że gracz postawi n jednostek na polu k

Graf warstw

- Tworzymy graf skierowany o $K+1$ warstwach i $N+1$ wierzchołkach w każdej warstwie.
- Dla każdego wierzchołka dodajemy krawędzie do wierzchołków na prawo w niższej warstwie.

  Formalnie, dla każdego $1 \le k \le K$, $0 \le i \le j \le N$ dodajemy krawędź z $V_{k-1,i}$ do $V_{k,j}$.



K – liczba pól

N – liczba jednostek gracza

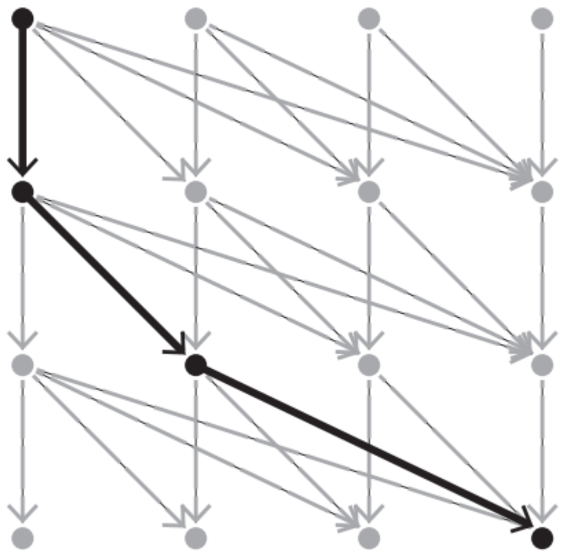
$V_{k,i}$ – i. wierzchołek w k. warstwie ($0 \le k \le K$, $0 \le i \le N$)

Ścieżka kanoniczna

- Dowolna ścieżka zaczynająca się w $V_{0,0}$ i kończąca w $V_{K,N}$.

  Musi mieć K krawędzi. Każda krawędź przechodzi o jedną warstwę w dół i ≥ 0 wierzchołków w prawo.

- Reprezentuje strategie czystą.



$K + 1$ – liczba warstw w grafie

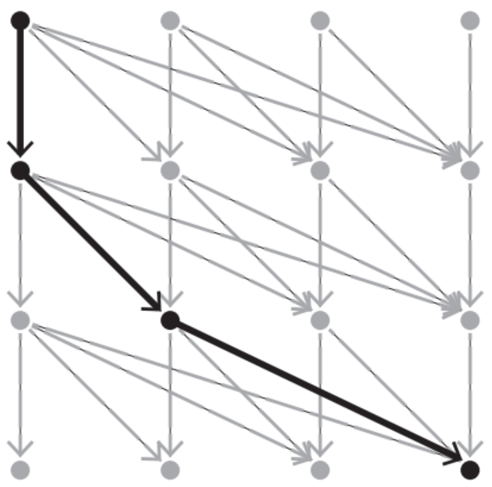
$N + 1$ – liczba wierzchołków w jednej warstwie

$V_{k,i}$ – i. wierzchołek w k. warstwie ($0 \leq k \leq K$, $0 \leq i \leq N$)

Ścieżka kanoniczna

Strategie prostą można reprezentować jako ścieżkę kanoniczną.

- Weźmy dowolną strategie prostą $\hat{x}$.
- Niech $S_k = \sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i$.
- Niech i. krawędź prowadzi do wierzchołka V_{i,S_i}.
- Ścieżka jest kanoniczna
  - $S_{k+1} \geq S_k$, więc krawędzie idą w prawo
  - $S_K = \sum_{i=1}^{K} \hat{x}_i = N$, więc ostatni wierzchołek to $V_{K,N}$



K – liczba pól
$K+1$ – liczba warstw w grafie

N – liczba jednostek gracza
$N+1$ – liczba wierzchołków w jednej warstwie

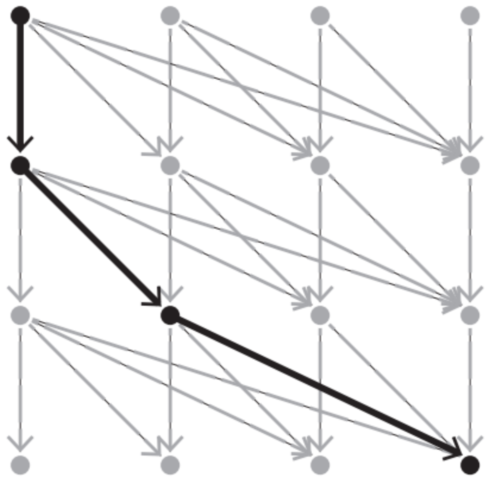
$V_{k,i}$ – i. wierzchołek w k. warstwie ($0 \leq k \leq K$, $0 \leq i \leq N$)

$\hat{x}_k$ – liczba jednostek postawionych na polu k

Ścieżka kanoniczna

Ścieżka kanoniczna reprezentuje strategie czystą.

- Weźmy dowolną ścieżkę kanoniczną. Ścieżka przechodzi przez $V_{0,0}, V_{1,S_1}, \ldots , V_{K,S_K}$.
- Ścieżka jest kanoniczna, więc $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ \ldots \leq S_K = N$.
- Niech $\hat{x}_k = S_k - S_{k-1}$.
- $\hat{x}$ jest strategią czystą reprezentowaną przez ścieżkę koniczną.
- $\hat{x}$ jest poprawną strategią, ponieważ $\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i = \sum_{i=1}^{k} S_k - S_{k-1} = S_K = N$



K – liczba pól
$K+1$ – liczba warstw w grafie

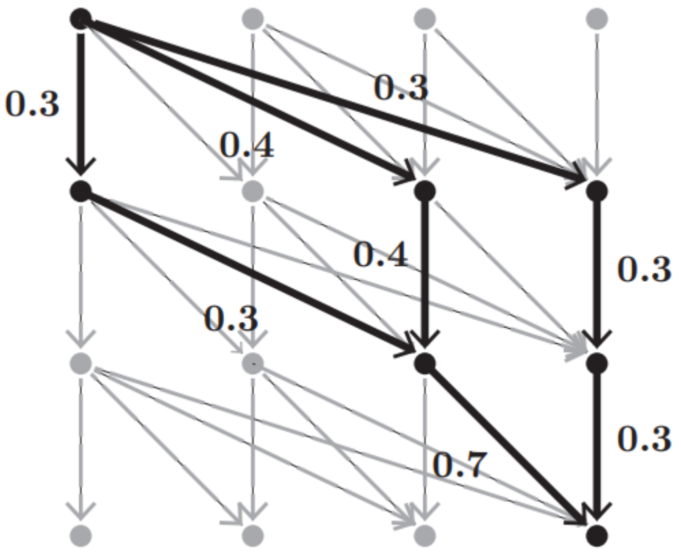
N – liczba jednostek gracza
$N+1$ – liczba wierzchołków w jednej warstwie

$V_{k,i}$ – i. wierzchołek w k. warstwie ($0 \leq k \leq K$, $0 \leq i \leq N$)

$\hat{x}_k$ – liczba jednostek postawionych na polu k

Przepływ kanoniczny

- Dowolny przepływ o źródle w $V_{0,0}$, ujściu w $V_{K,N}$ i wartości 1.
  - Można (i będziemy) go traktować jako złożenie wielu ścieżek kanonicznych z wagami.
- Reprezentuje strategie mieszaną.



$K + 1$ – liczba warstw w grafie

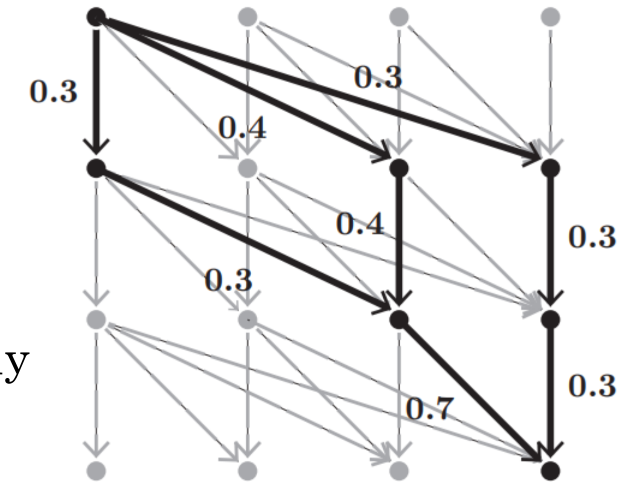
$N + 1$ – liczba wierzchołków w jednej warstwie

$V_{k,i}$ – i. wierzchołek w k. warstwie ($0 \leq k \leq K$, $0 \leq i \leq N$)

Przepływ kanoniczny

Strategie mieszaną można reprezentować jako przepływ kanoniczny.

- Strategie prostą reprezentujemy jako przepływ po ścieżce kanonicznej o wartości 1.
- Strategie mieszaną reprezentujemy jako ważoną sumę przepływów reprezentujących strategie proste.
  - Jeżeli strategia ma prawdopodobieństwo p to wartość jej przepływu mnożymy przez p.
- Przepływy w $V_{0,0}$, $V_{K,N}$ sumują się do 1, ponieważ prawdopodobieństwa strategii czystych sumują się do 1.



$K + 1$ – liczba warstw w grafie

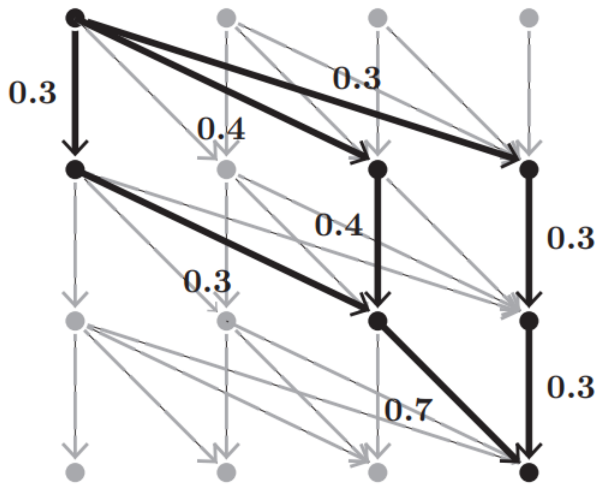
$N + 1$ – liczba wierzchołków w jednej warstwie

Przepływ kanoniczny

Przepływ kanoniczny reprezentuje klasę strategii mieszanych.

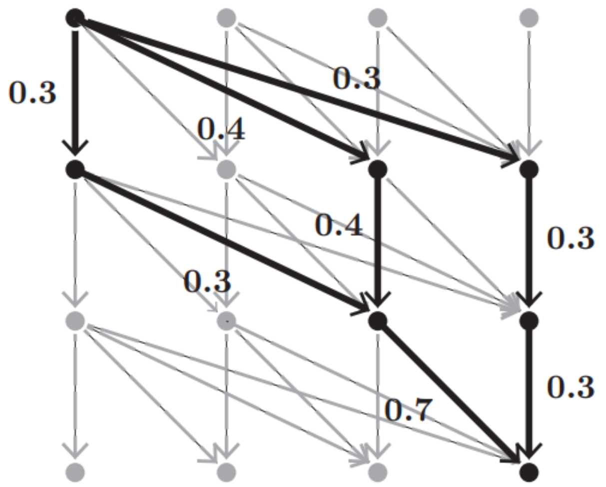
- Jeżeli dwie strategie są reprezentowane przez taki sam przepływ kanoniczny, to dla każdego pola mają taki sam rozkład prawdopodobieństwa liczby jednostek.
- Jeżeli dwie strategie na każdym polu mają takie same rozkłady liczby jednostek, to są nierozróżnialne podczas liczenia wyniku.
- Np. nierozróżnialne są strategie

$$\left[{}^{1}/_{2} \times (1, 0, 1, 0), {}^{1}/_{2} \times (0, 1, 0, 1)\right]$$
$$\left[{}^{1}/_{2} \times (1, 0, 0, 1), {}^{1}/_{2} \times (0, 1, 1, 0)\right]$$



Przepływ kanoniczny

- Wybieramy krawędź e o najmniejszym przepływie f.
- Wybieramy ścieżkę s po krawędziach z przepływu, zawierającą krawędź e.
- Zmniejszamy o f wartości na krawędziach z s.
  Otrzymujemy nowy przepływ o wartości $1 - f$ i mniejszej liczbie krawędzi.
- Do strategii mieszanej dodajemy strategie reprezentowaną przez s z prawdopodobieństwem p.
- Powtarzamy, aż wyzerujemy przepływ.



Program liniowy

- Wymagamy by przepływy były nieujemne.

  Dla $0 \le k < K$, $0 \le i \le j \le A$

  $$\boldsymbol{F_{k,i,j}} \ge 0$$

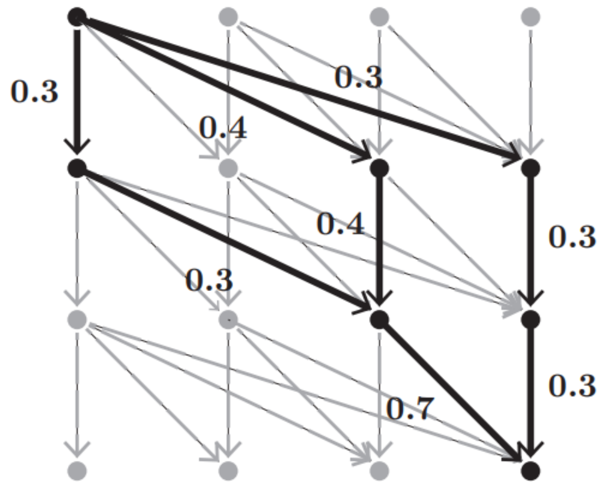
- Sprawdzamy przepływ w wierzchołku $V_{0,0}$.

  $$\sum_{j=0}^{A} \boldsymbol{F_{0,0,j}} = 1$$

- Sprawdzamy przepływy w pierwszej warstwie.

  Dla $0 < l \le A$:

  $$\sum_{j=l}^{A} \boldsymbol{F_{0,l,j}} = 0$$



K – liczba pól
$K + 1$ – liczba warstw w grafie

A – liczba jednostek gracza A
$A + 1$ – liczba wierzchołków w jednej warstwie

$V_{k,i}$ – i. wierzchołek w k. warstwie ($0 \le k \le K$, $0 \le i \le N$)

$\boldsymbol{F_{k,i,j}}$ – wartość przepływu na krawędzi $V_{k,i} - V_{k+1,j}$

Program liniowy

- Sprawdzamy przepływy w środkowych warstwach

  Dla $1 \le k \le K-1,\ 0 \le l \le A$

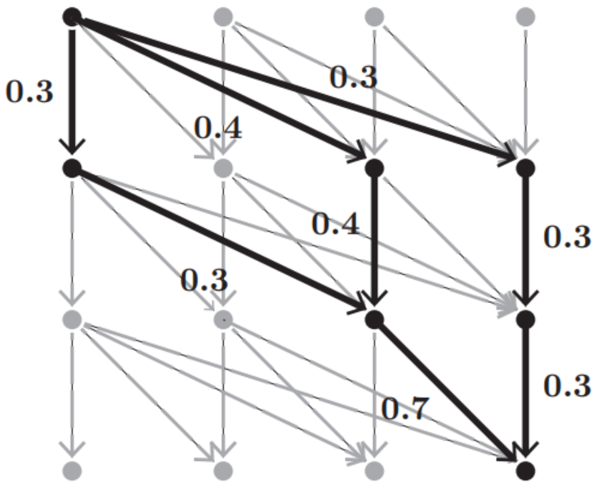
$$\sum_{i=0}^{l} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k-1,i,l}} = \sum_{j=l}^{A} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k,l,j}}$$

- Sprawdzamy przepływy w wierzchołku $V_{K,N}$.

$$\sum_{j=0}^{A} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{K-1,j,A}} = 1$$

- Co ze sprawdzeniem ostatniej warstwy?

  Niepotrzebne. Zagwarantowaliśmy, że i tak nic nie może tam dopłynąć.



K – liczba pól
$K+1$ – liczba warstw w grafie

A – liczba jednostek gracza A
$A+1$ – liczba wierzchołków w jednej warstwie

$V_{k,i}$ – i. wierzchołek w k. warstwie ($0 \le k \le K$, $0 \le i \le N$)

$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k,i,j}}$ – wartość przepływu na krawędzi $V_{k,i} - V_{k+1,j}$

Wynik strategii

- Sprawdziliśmy, że strategia gracza A jest poprawna.
- Potrzebujemy zagwarantować, że niezależnie od strategii gracza B, gracz A dostanie odpowiednio duży wynik.

Kontrowanie strategii

- Gracz B zna strategie gracza A i stara się zmaksymalizować swój wynik.
- Wystarczy, że gracz B korzysta ze strategii czystej.
  - Załóżmy, że istnieje strategia mieszana dla gracza B lepsza od wszystkich strategii czystych.
  - Strategie mieszaną przedstawiamy jako $\hat{x} = [(p_1, \hat{x}_1), \dots, (p_n, \hat{x}_n)]$.
  - Niech $S_{\hat{x}}$ oznacza oczekiwany wynik gracza B przy użyciu strategii $\hat{x}$. Wtedy:
  $$S_{\hat{x}} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot S_{\hat{x}_i}$$
  - Dla pewnego i musi zachodzić
  $$S_{\hat{x}} \leq S_{\hat{x}_i}$$
  - Znaleźliśmy przynajmniej równie dobrą strategie czystą.

Kontrowanie strategii

- Gracz B zna strategie gracza A. Szukamy strategii czystej dla gracza B maksymalizującej jego wynik.
- Użyjemy programowania dynamicznego.

  $D_{k,i}^{B}$ – oczekiwany wynik z pól $[1, \dots, k]$, jeśli łącznie postawimy na nich i jednostek.
- Ustawiamy wartości początkowe:

$$D_{0,i}^{B} = 0$$

- Wartości wyliczamy zgodnie z równością:

$$D_{k,i}^{B} = \max_{0 \le j \le i} \left(D_{k-1,j}^{B} + W_{k,i-j} \right)$$

- Wynik gracza B z całej gry to $D_{K,B}^{B}$

K – liczba pól

B — liczba jednostek gracza B

$W_{k,i}$ – oczekiwany wynik gracza B z pola k, jeśli postawi na nim i jednostek

Program liniowy

- Ustawiamy wartości początkowe

  Dla $0 \leq i \leq B$
  $$\boldsymbol{D^B_{0,i}} = 0$$

- Ustawiamy pozostałe wartości

  Dla $0 \leq j \leq i \leq B$
  $$\boldsymbol{D^B_{k,i}} \geq \boldsymbol{D^B_{k-1,j}} + \boldsymbol{W_{k,j-i}}$$

- Wyciągamy wynik
  $$\boldsymbol{D^B_{K,B}} \leq -\boldsymbol{u}$$

K – liczba pól

B — liczba jednostek gracza B

$\boldsymbol{W_{k,i}}$ – oczekiwany wynik gracza B z pola k, jeśli postawi na nim i jednostek

$\boldsymbol{u}$ – oczekiwany wynik gracza A

Program liniowy

- Wynik z pola zależy od strategii gracza A, więc musimy je policzyć w programie.

  Dla $0 \leq k \leq K$, $0 \leq i \leq B$

$$\boldsymbol{W^{B}_{k,i}} = \sum_{l=0}^{A} \boldsymbol{P^{A}_{k,l}} \cdot U^{B}_{k}(i,l)$$

- Potrzebujemy również wyliczyć $\boldsymbol{P^{B}_{k,l}}$

  Dla $0 \leq j \leq i \leq B$

$$\boldsymbol{P^{A}_{k,j}} = \sum_{i=0}^{A-j} \boldsymbol{F_{k-1,i,i+j}}$$

K – liczba pól

A — liczba jednostek gracza A

B — liczba jednostek gracza B

$\boldsymbol{P^{A}_{k,j}}$ – prawdopodobieństwo, że gracz A postawi j jednostek na polu k.

$\boldsymbol{W_{k,i}}$ – oczekiwany wynik gracza B z pola k, jeśli postawi na nim i jednostek

$U^{B}_{k}(i,l)$ – wynik gracza B z pola k, jeśli A ustawi tam l jednostek, a B ustawi i

Złożoność

- Łącznie wykorzystaliśmy
  - $O(N^2K)$ zmiennych
  - $O(N^2K)$ nierówności

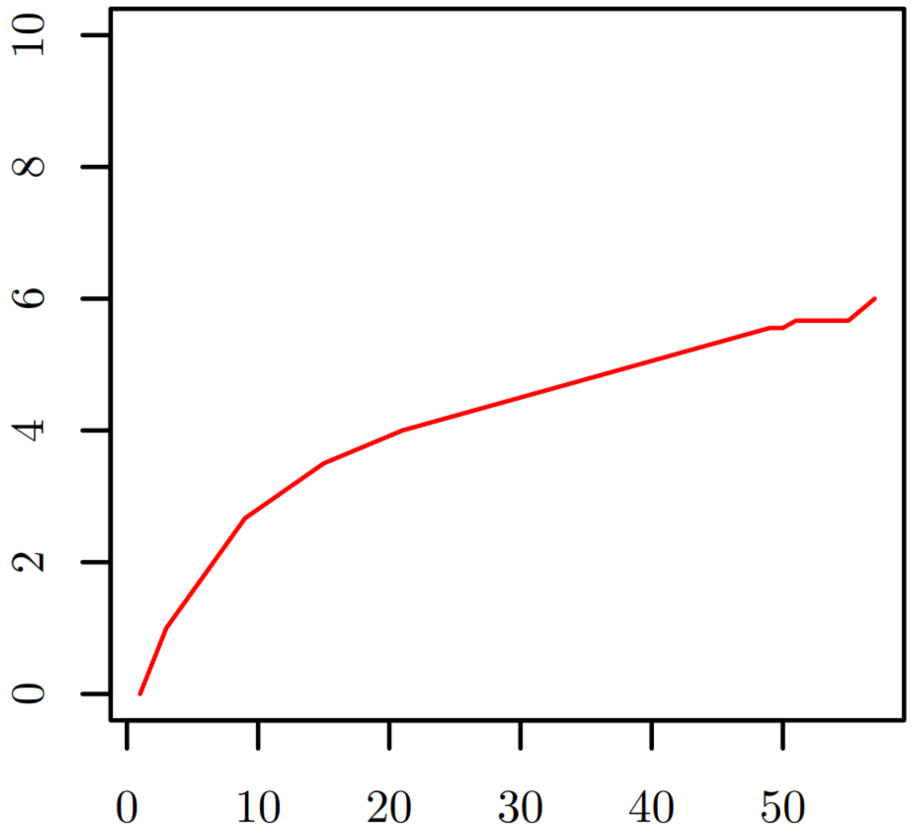
Wyniki

Wydajność

K	A	B	Constraints	Running Time
10	20	20	3595	0m3.575s
10	20	25	4855	0m3.993s
10	20	30	6365	0m6.695s
10	25	25	5295	0m8.245s
10	25	30	6805	0m7.502s
10	30	30	7320	0m30.955s
15	20	20	5065	0m14.965s
15	20	25	6950	0m11.842s
15	20	30	9210	0m24.196s
15	25	25	7440	0m46.165s
15	25	30	9700	0m31.714s
15	30	30	10265	2m20.776s
20	20	20	6535	0m46.282s
20	20	25	9045	0m35.758s
20	20	30	12055	0m38.507s
20	25	25	9585	1m38.367s
20	25	30	12595	0m51.795s
20	30	30	13210	9m13.288s

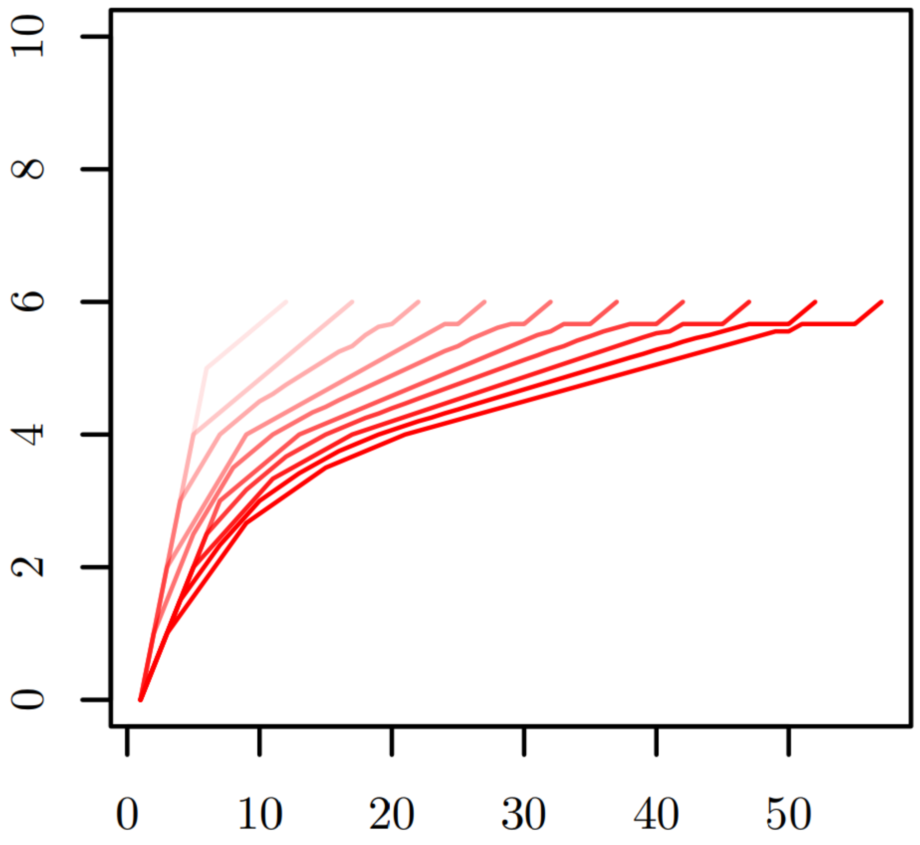
Wyniki graczy

- $K = 6$ pól bitwy
- $B = 10$ jednostek gracza B
- $\boldsymbol{x}$ wynik gracza A
- $\boldsymbol{y}$ przewaga gracza A $(A - B)$



Wyniki graczy

- $K = 6$ pól bitwy
- $B = 1 \dots 10$ jednostek gracza B
- $\boldsymbol{x}$ wynik gracza A
- $\boldsymbol{y}$ przewaga gracza A $(A - B)$



Wyniki graczy

- $K = 4, 6 \ldots 10$ pól bitwy
- $B = 1 \ldots 10$ jednostek gracza B
- $\boldsymbol{x}$ wynik gracza A
- $\boldsymbol{y}$ przewaga gracza A $(A - B)$