Rynkowe podejście do analizy wyborów komitetowych

Wiktor Grzankowski

18 kwietnia 2024

Poruszane zagadnienia

- Czym są wybory komitetowe
- Niedoskonałości istniejących i znanych aksjomatów
- Jak badać sprawiedliwość
- Pojęcie Stable Priceability
- Potencjał na dalszą pracę

Wybory

Definicja

Wybory (election) to krotka $(N, C, \{A_i\}_{i \in N}, k)$, gdzie

- $N = [n]$ oraz $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ to zbiory wyborców i kandydatów
- dla każdego wyborcy $i \in N$, $A_i \subseteq C$ to zbiór kandydatów, który i popiera. Podobnie, $N(c)$ to zbiór wyborców, którzy popierają projekt c.
- $k \in [m]$ to liczba kandydatów, którzy zostaną wybrani w wyborach

Inne aksjomaty

Extended Justified Representation

Reguła $\mathcal{R}$ spełnia EJR, jeśli dla każdych wyborów E, każdy wygrywający komitet $W \in \mathcal{R}(E)$, i dla każdej $l-$zgodnej grupy wyborców S, istnieje wyborca $i \in S$, który popiera co najmniej l członków W.

Inne aksjomaty

Proportionality degree

Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Reguła $\mathcal{R}$ ma proportionality degree f, jeśli dla każdych wyborów E, każdy wygrywajacy komitet W i każdej $l-$zgodnej grupy wyborców S, średnia liczba członków wybranego komitetu, których wspiera wyborca z S wynosi co najmniej $f(l)$, czyli $\frac{1}{|S|}\sum_{i \in S} u_i(W) \geqslant f(l)$.
Proportionality degree większe niż $f(l) = l - 1$ implikuje EJR.

Inne aksjomaty

- Trudny do znalezienia i sprawdzenia - NP-trudny
- Nie wiadomo, czy zawsze jest niepusty dla approval-based wyborów
- Idea - dostatecznie duża grupa wyborców powinna móc wybrać pewną liczbę kandydatów
- Implikuje EJR

Rdzeń

Definicja

Dla danych wyborów, wybór W jest w rdzeniu, jeśli dla każdego $S \subseteq N$ oraz $T \subseteq C$, takich, że zachodzi $\frac{|T|}{k} \leqslant \frac{|S|}{n}$, istnieje wyborca $i \in S$ taki, że $u_i(W) \geqslant u_i(T)$.

Rdzeń

Przykład niesprawiedliwego podziału

Niech $n = 50$ i $k = 5$. Preferencje wyborców:

- $i_1 - i_{10}$ popierają $c_1 - c_5$
- $i_{11} - i_{19}$ popierają c_6
- $i_{21} - i_{29}$ popierają c_7
- $i_{31} - i_{39}$ popierają c_8
- $i_{41} - i_{49}$ popierają c_9
- $i_{20}, i_{30}, i_{40}, i_{50}$ popierają $c_{10} - c_{13}$

Wybór $W_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ jest w rdzeniu. Ten wynik daje zero satysfakcji dla 80% wyborców. Można uznać, że intuicyjnie sprawiedliwszym wyborem jest $W_2 = \{c_1, c_6, c_7, c_8, c_9\}$.

Jak badać sprawiedliwość

- Liczne istniejące aksjomaty, nawet pomimo dużej złożoności obliczeniowej, choć pozwalają na odrzucenie pewnych konkretnych niechcianych przypadków, nie potrafią zapewnić w ogólności, że wybrany komitet będzie sprawiedliwy w oczach wyborców.
- Stable priceability oraz balanced stable priceability podchodzą do tematu w sposób rynkowy, gwarantując intuicyjnie w miarę sprawiedliwy wybór komitetów.

Priceability

Definicja

Price system to para $ps = (p, \{p_i\}_{i \in N})$, gdzie $p \in \mathbb{R}_+$ to cena wyboru jednego kandydata oraz dla każdego wyborcy $i \in N$, $p_i : C \rightarrow [0, p]$ to payment function, która mówi ile dany wyborca płaci za wybór danego kandydata.
Mówimy, że wybór W jest priceable, jeśli jest wspierany przez price system ps, czyli spełnione są warunki (C1)-(C5).

Priceability

Warunki

- (C1) wyborca płaci jedynie za kandydatów, których popiera: $p_i(c) = 0$ gdy $c \notin A_i$
- (C2) każdy wyborca ma ten sam początkowy budżet równy 1, $\sum_{c \in C} p_i(c) \leqslant 1$
- (C3) każdy wybrany kandydat zbiera koszt równy p, $\sum_{i \in N} p_i(c) = p$ dla każdego $c \in W$
- (C4) wyborcy nie płacą za niewybranych kandydatów: $\sum_{i \in N} p_i(c) = 0$ dla $c \notin W$
- (C5) dla każdego niewybranego kandydata, popierający go wyborcy mają niewydany budżet wynoszący maksymalnie p. Formalnie $\sum_{i \in N(c)} r_i \leqslant p$ dla $c \notin W$

Priceability

Zalety

- Intuicyjnie bardzo sensowny aksjomat
- Brzmi sprawiedliwie
- Metoda równych podziałów jest priceable dla approval-based wyborów komitetowych

Priceability

Wady

Rozpatrzmy regułę Utilitarian Priceable Rule (UPR), która spośród priceable komitetów, wybiera ten, który maksymalizuje utilitarian social welfare, czyli łączną liczbę approvali od wyborców.
UPR nie spełnia EJR oraz zapewnia bardzo niski współczynnik proporcjonalności - jedynie 2.

Priceability

Krok w dobrą stronę

Price system wspierający komitet W świadczy o pewnej sprawiedliwości. Ponieważ żadna grupa wyborców nie może wykorzystać swoich pozostałych pieniędzy do wyboru kolejnego kandydata (C5), to każda grupa musiała wydać znaczną część swoich zasobów.
Nie ma jednak pewności, czy te pieniądze zostały wydane optymalnie.

Stable priceability

Porządek

Niech $\succ$ będzie porządkiem liniowym nad $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ takim że $(x, p) \succ (y, q) \iff x > y$ lub ($x = y$ oraz $p < q$).
Interpretacja: wyborca woli zapłacić p za komitet, gdzie popiera x kandydatów, niż zapłacić q za komitet, gdzie popiera y kandydatów.
Naturalnie, jeśli ma 2 zbiory kandydatów, w których popiera tyle samo osób, woli już zapłacić mniej.

Stable priceability

Definicja

Komitet W jest stable priceable, jeśli istnieje stable price system $ps = (p, \{p_i\}_{i \in N})$, który wspiera W, czyli spełnia warunki $(C1) - (C4)$ oraz warunek stabilności $(S5)$.

Stable priceability

Warunek stabilności

(S5) Nie istnieją koalicja wyborców $S \subseteq N$, zbiór kandydatów $W' \subseteq C - W$, zbiory $\{p'_i\}_{i \in S}(p'_i : W' \to [0, 1])$ i $\{R_i\}_{i \in S}$, gdzie $R_i \subseteq W$, takie, że zachodzi:

1. Dla każdego $c \in W' : \sum_{i \in S} p'_i(S) > p$
2. Dla każdego $i \in S : p_i(W - R) + p'_i(W') \leqslant 1$
3. Dla każdego $i \in S$:
   $(u_i(W - R_i \cup W'), p_i(W - R_i) + p'_i(W')) \succeq (u_i(W), p_i(W))$

Stable priceability

Stabilność inaczej

Warunek (S5) jest równoważny warunkowi (C1) wraz z zachodzeniem nierówności (3)

$$(3) \quad \forall c \notin W \sum_{i \in N(c)} \max\left(\max_{a \in W}(p_i(a)), r_i \right) \leqslant p$$

Przypomnienie (C1):

$$\forall i \in N,\ c \notin A_i :\ p_i(c) = 0$$

Stable priceability

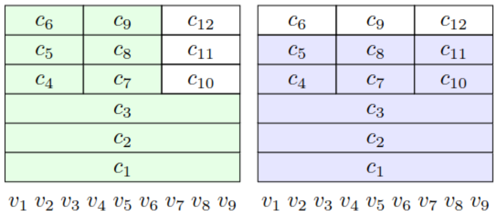
Złożoność obliczeniowa

- Mając daną definicję wyborów oraz komitet W, można w czasie wielomianowym sprawdzić, czy istnieje price system wspierający W
- Niestety, komitety spełniające SP nie zawsze istnieją

Proportionality degree: SP gwarantuje proportionality degree równą $l - 1$. To znacznie lepszy wynik, niż $\frac{l-1}{2}$ dla EJR oraz 2 dla klasycznego priceability.

Stable priceability

Problematyczny przykład



Wybór zaznaczony na zielono jest SP dla price systemu takiego, że $p = 1$ i wyborcy v_7, v_8, v_9 płacą po $\frac{1}{3}$ za kandydatów c_1, c_2, c_3, wyborcy v_1, v_2, v_3 płacą po $\frac{1}{3}$ za c_4, c_5, c_6, a v_4, v_5, v_6 po $\frac{1}{3}$ za c_7, c_8, c_9.

Łatwo zauważyć, że wybór zielony, choć jest SP, jest znacznie bardziej niesprawiedliwy, niż wybór niebieski.

Stable priceability

Wada

We wspomnianym przykładzie, niesprawiedliwość wynikała z mocno niesymetrycznych payment functions.
Dobrym krokiem w stronę sprawiedliwości byłby system, w którym wszyscy wyborcy płacą po tyle samo za tego samego kandydata, którego popierają.

Balanced price systems

Definicja

- Balanced price system, to taki price system, w którym wszyscy wyborcy płacą za tego samego kandydata tyle samo.
- Tak jak wcześniej, kandydat musi zebrać od swoich wyborców łącznie pewną ustaloną kwotę p
- Zmiana - wyborca czerpie korzyści z wyboru kandydata tylko, jeśli za niego zapłacił

Balanced stable priceability

Różnice względem SP

- Ponieważ wyborca nie ma żadnego pożytku z kandydatów, na których nie głosował, inaczej patrzymy na komitety.
- Komitet to para $(W, \{u_i\}_{i \in N})$, gdzie $u_i \ : \ W \rightarrow \{0, 1\}$ to binarna funkcja użyteczności wskazująca, czy wyborca i ma pożytek kandydata c

Balanced stable priceability

Definicja

Komitet $(W, \{u_i\}_{i \in N})$ jest wspierany przez BSP price system, jeśli spełnione są następujące warunki:

- (C2) każdy wyborca ma ten sam początkowy budżet równy 1
- (C3) każdy wybrany kandydat zbiera koszt równy p
- (C4) wyborcy nie płacą za niewybranych kandydatów
- (E1) dla każdego $c \in W$, istnieje wartość ρ_c taka, że albo $p_i(c) = \rho_c$, albo $u_i(c) = 0$. Równoważnie $p_i(c) = u_i(c) \cdot \rho_c$
- (E5) warunek stabilności

Balanced stable priceability

Warunek stabilności

(E5) - w istocie jest bardzo podobny do warunku (S5), tylko bierzemy pod uwagę, że komitet W jest parą.

Balanced stable priceability

Stabilność formalnie

Nie istnieja koalicja wyborców $S \subseteq N$, komitet $(W', \{u'_i\}_{i \in N})(W' \subseteq C - W)$ i zbiory $\{p'_i\}_{i \in S}(p'_i : W' \to [0,1])$ i $\{R_i\}_{i \in N}$, gdzie $R_i \subseteq W$, takie, że zachodzi

- Dla każdego $c \in W'$, istnieje wartość ρ_c taka, że $p'_i(c) = u'_i(c) \cdot \rho_c$
- Dla każdego $c \in W' : \sum_{i \in S} p'_i(c) > p$
- Dla każdego $i \in S : p_i(W - R_i) + p'_i(W') \leqslant 1$
- Dla każdego $i \in S$ $(u_i(W - R_i) + u'_i(W'), p_i(W - R_i) + p'_i(W')) \succeq (u_i(W), p_i(W))$

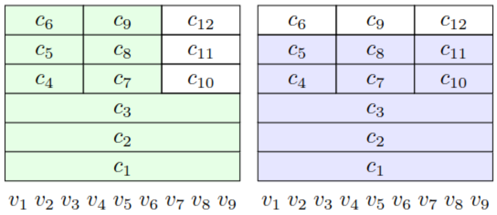
Balanced stable priceability

Dobre wieści

- Komitet spełniający BSP spełnia także EJR
- Można w czasie wielomianowym sprawdzić czy dany komitet jest BSP. Ponadto, dla danej instancji wyborów E i ceny p, można znaleźć komitet BSP w czasie wielomianowym.

Balanced stable priceability

Nie aż tak nieuczciwe



Zielony komitet nie spełnia warunku stabilności (S5).

- Wszyscy wyborcy woleliby podzielić się kosztem wyboru kandydata c_1 ($W' = \{c_1\}, \rho(c_1) = \frac{1}{9}$)
- v_1, v_2, v_3 woleliby wybrać c_1 zamiast c_4 ($W_i' = \{c_1\}, R_i = \{c_4\}$), bo liczba ich reprezentantów się nie zmieni, a zapłacą mniej - $\frac{1}{9}$ zamiast $\frac{1}{3}$
- analogicznie v_4, v_5, v_6 wolą c_1 zamiast c_7
- v_7, v_8, v_9 też nie mają nic przeciwko ($W_i' = \{c_1\}, R_i = \{c_1\}$), bo zapłacą mniej

Potencjał do badań

Nad SP

- Rozwój biblioteki Pabutools
- Definicja SP i BSP dla użyteczności ogólnych

Źródła

Przygotowując prezentację opierałem się o prace

- Market-Based Explanations of Collective Decisions [Peters, Pierczyński, Shah, Skowron]
- Proportional Participatory Budgeting with Additive Utilites [Peters, Pierczyński, Skowron]

Dziękuję za uwagę