Aksjomaty proporcjonalności w głosowaniu na wielu zwycięzców

Grzegorz Nowakowski

7 listopada, 2024

Multiwinner voting

- $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ – zbiór kandydatów
- $N = \{1, \ldots, n\}$ – zbiór wyborców
- $A_i \subseteq C$ – zbiór akceptowalnych kandydatów dla wyborcy i
- $\succeq_i \subseteq A_i \times A_i$ – relacja preferencji i-tego wyborcy nad jego akceptowalnymi kandydatami
- $P = (\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$ – profil preferencji
- dla $A, B \subseteq C$ powiemy, że $A \succeq_i B$, jeśli zachodzi $a \succeq_i b$ dla każdych $a \in A$ i $b \in B$
- dla $c \in A_i$ niech $rank(i, c) = |\{c' \in C : c' \succ_i c\}| + 1$ oznacza rangę kandydata c dla wyborcy i, przy czym nieakceptowalni kandydaci mają rangę $+\infty$
- k – rozmiar wybieranego komitetu
- $W \subseteq C$ jest osiągalny, jeśli $|W| \leqslant k$

Modele preferencji

Definition (Strict preferences)

Jeśli $\succeq_i$ jest porządkiem liniowym nad zbiorem A_i, to mówimy, że wyborca i ma ostre preferencje. Innymi słowy, nie ma remisów pomiędzy akceptowalnymi kandydatami.

Modele preferencji

Definition (Strict preferences)

Jeśli $\succeq_i$ jest porządkiem liniowym nad zbiorem A_i, to mówimy, że wyborca i ma ostre preferencje. Innymi słowy, nie ma remisów pomiędzy akceptowalnymi kandydatami.

Definition (Approval preferences)

Jeśli wyborca i nie ma preferencji względem akceptowalnych kandydatów (wszystkich lubi tak samo), to mówimy, że ma on zgodne preferencje.

Modele preferencji

Definition (Strict preferences)

Jeśli $\succeq_i$ jest porządkiem liniowym nad zbiorem A_i, to mówimy, że wyborca i ma ostre preferencje. Innymi słowy, nie ma remisów pomiędzy akceptowalnymi kandydatami.

Definition (Approval preferences)

Jeśli wyborca i nie ma preferencji względem akceptowalnych kandydatów (wszystkich lubi tak samo), to mówimy, że ma on zgodne preferencje.

Definition (Weak preferences)

W ogólnym przypadku używamy pojęcia słabych preferencji, jeśli nie mamy do czynienia z żadnymi z powyższych.

Przykład 1

Niech $C = \{c_1, \ldots, c_6\}$, $n = 3$ oraz dane preferencje:

1. $c_1 \succ \{c_2, c_3, c_4\}$
2. $\{c_2, c_3\}$
3. $c_5 \succ c_4 \succ c_3$

Przykład 1

Niech $C = \{c_1, \dots, c_6\}$, $n = 3$ oraz dane preferencje:

1. $c_1 \succ \{c_2, c_3, c_4\}$
2. $\{c_2, c_3\}$
3. $c_5 \succ c_4 \succ c_3$

$A_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, A_2 = \{c_2, c_3\}, A_3 = \{c_3, c_4, c_5\}$

Przykład 1

Niech $C = \{c_1, \dots, c_6\}$, $n = 3$ oraz dane preferencje:

1. $c_1 \succ \{c_2, c_3, c_4\}$
2. $\{c_2, c_3\}$
3. $c_5 \succ c_4 \succ c_3$

$A_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, A_2 = \{c_2, c_3\}, A_3 = \{c_3, c_4, c_5\}$
$rank(1, c_1) = 1, rank(1, c_2) = rank(1, c_3) = rank(1, c_4) = 2, \dots$

Proporcjonalność dla ostrych preferencji

Definition (Solid coalition)

Dla ostrego profilu preferencji, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy solidną koalicję nad zbiorem kandydatów $C' \subseteq C$, jeśli $C' \succ_i C \setminus C'$ dla każdego $i \in N'$.

Proporcjonalność dla ostrych preferencji

Definition (Solid coalition)

Dla ostrego profilu preferencji, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy solidną koalicję nad zbiorem kandydatów $C' \subseteq C$, jeśli $C' \succ_i C \backslash C'$ dla każdego $i \in N'$.

Definition (Proportionality for Solid Coalitions)

Dla danej instancji wyborów z ostrymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia PSC, jeśli dla każdego zbioru $N' \subseteq N$ tworzącego solidną koalicję nad $C' \subseteq C$ i każdego $l \in \mathbb{N}$ takiego, że $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$, zachodzi $|C' \cap W| \geqslant \min(|C'|, l)$.

Przykład 2

Definition (Solid coalition)

Dla ostrego profilu preferencji, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy solidną koalicję nad zbiorem kandydatów $C' \subseteq C$, jeśli $C' \succ_i C \setminus C'$ dla każdego $i \in N'$.

Niech $C = \{a, b, c, d\}$, $n = 7$ oraz dane preferencje:

1. $a \succ b \succ c$
2. $b \succ c \succ a$
3. $c \succ a \succ b$
4. $a \succ b \succ d$
5. $b \succ c \succ d$
6. $c \succ a \succ d$
7. d

Przykład 2

Definition (Solid coalition)

Dla ostrego profilu preferencji, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy solidną koalicję nad zbiorem kandydatów $C' \subseteq C$, jeśli $C' \succ_i C \setminus C'$ dla każdego $i \in N'$.

Niech $C = \{a, b, c, d\}$, $n = 7$ oraz dane preferencje:

1. $a \succ b \succ c$
2. $b \succ c \succ a$
3. $c \succ a \succ b$
4. $a \succ b \succ d$
5. $b \succ c \succ d$
6. $c \succ a \succ d$
7. d

Przykład 2

Definition (Solid coalition)

Dla ostrego profilu preferencji, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy solidną koalicję nad zbiorem kandydatów $C' \subseteq C$, jeśli $C' \succ_i C \setminus C'$ dla każdego $i \in N'$.

Niech $C = \{a, b, c, d\}$, $n = 7$ oraz dane preferencje:

1. $a \succ b \succ c$
2. $b \succ c \succ a$
3. $c \succ a \succ b$
4. $a \succ b \succ d$
5. $b \succ c \succ d$
6. $c \succ a \succ d$
7. d

Przykład 2

Definition (Solid coalition)

Dla ostrego profilu preferencji, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy solidną koalicję nad zbiorem kandydatów $C' \subseteq C$, jeśli $C' \succ_i C \backslash C'$ dla każdego $i \in N'$.

Niech $C = \{a, b, c, d\}$, $n = 7$ oraz dane preferencje:

1. $a \succ b \succ c$
2. $b \succ c \succ a$
3. $c \succ a \succ b$
4. $a \succ b \succ d$
5. $b \succ c \succ d$
6. $c \succ a \succ d$
7. d

Przykład 2

Definition (Solid coalition)

Dla ostrego profilu preferencji, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy solidną koalicję nad zbiorem kandydatów $C' \subseteq C$, jeśli $C' \succ_i C \setminus C'$ dla każdego $i \in N'$.

Niech $C = \{a, b, c, d\}$, $n = 7$ oraz dane preferencje:

1. $a \succ b \succ c$
2. $b \succ c \succ a$
3. $c \succ a \succ b$
4. $a \succ b \succ d$
5. $b \succ c \succ d$
6. $c \succ a \succ d$
7. d

Przykład 2

Definition (Solid coalition)

Dla ostrego profilu preferencji, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy solidną koalicję nad zbiorem kandydatów $C' \subseteq C$, jeśli $C' \succ_i C \setminus C'$ dla każdego $i \in N'$.

Niech $C = \{a, b, c, d\}$, $n = 7$ oraz dane preferencje:

1. $a \succ b \succ c$
2. $b \succ c \succ a$
3. $c \succ a \succ b$
4. $a \succ b \succ d$
5. $b \succ c \succ d$
6. $c \succ a \succ d$
7. d :(

Przykład 2

Definition (Proportionality for Solid Coalitions)

Dla danej instancji wyborów z ostrymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia PSC, jeśli dla każdego zbioru $N' \subseteq N$ tworzącego solidną koalicję nad $C' \subseteq C$ i każdego $l \in \mathbb{N}$ takiego, że $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$, zachodzi $|C' \cap W| \geqslant \min(|C'|, l)$.

Niech $C = \{a, b, c, d\}$, $n = 4$, $k = 2$ oraz dane preferencje:

1. $a \succ b \succ c$
2. $b \succ c \succ a$
3. $c \succ a \succ b$

7. d

Proporcjonalność dla zgodnych preferencji

Definition (Cohesive group)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami i liczby naturalnej l, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy grupę l-cohesive, jeśli $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$ i $|\bigcap_{i \in N'} A_i| \geqslant l$.

Proporcjonalność dla zgodnych preferencji

Definition (Cohesive group)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami i liczby naturalnej l, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy grupę l-cohesive, jeśli $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$ i $|\bigcap_{i \in N'} A_i| \geqslant l$.

Definition (Extended Justified Representation)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia EJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, istnieje wyborca $i \in N'$, tż $|A_i \cap W| \geqslant l$.

Proporcjonalność dla zgodnych preferencji

Definition (Cohesive group)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami i liczby naturalnej l, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy grupę l-cohesive, jeśli $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$ i $|\bigcap_{i \in N'} A_i| \geqslant l$.

Definition (Extended Justified Representation)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia EJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, istnieje wyborca $i \in N'$, tż $|A_i \cap W| \geqslant l$.

Definition (Proportional Justified Representation)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia PJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, zachodzi $|\bigcup_{i \in N'} A_i \cap W| \geqslant l$.

Przykład 3

Definition (EJR & PJR)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia:

- EJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, istnieje wyborca $i \in N'$, tż $|A_i \cap W| \geqslant l$;
- PJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, zachodzi $|\bigcup_{i \in N'} A_i \cap W| \geqslant l$.

Niech $C = \{a, b, c, d, e, f\}$, $n = 3$, $k = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a, d, e, f\}$
2. $\{b, d, e, f\}$
3. $\{c, d, e, f\}$

Przykład 3

Definition (EJR & PJR)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia:

- EJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, istnieje wyborca $i \in N'$, tż $|A_i \cap W| \geqslant l$;
- PJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, zachodzi $|\bigcup_{i \in N'} A_i \cap W| \geqslant l$.

Niech $C = \{a, b, c, d, e, f\}$, $n = 3$, $k = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a, d, e, f\}$
2. $\{b, d, e, f\}$
3. $\{c, d, e, f\}$

Rozważmy komitet $W = \{a, b, c\}$. Czy komitet ten spełnia

- PJR?
- EJR?

Przykład 3

Definition (EJR & PJR)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia:

- EJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, istnieje wyborca $i \in N'$, tż $|A_i \cap W| \geqslant l$;
- PJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, zachodzi $|\bigcup_{i \in N'} A_i \cap W| \geqslant l$.

Niech $C = \{a, b, c, d, e, f\}$, $n = 3$, $k = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a, d, e, f\}$
2. $\{b, d, e, f\}$
3. $\{c, d, e, f\}$

Rozważmy komitet $W = \{a, b, c\}$. Czy komitet ten spełnia

- PJR? ✔
- EJR?

Przykład 3

Definition (EJR & PJR)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia:

- EJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, istnieje wyborca $i \in N'$, tż $|A_i \cap W| \geqslant l$;
- PJR, jeśli dla każdej liczby naturalnej l i każdej grupy l-cohesive $N' \subseteq N$, zachodzi $|\bigcup_{i \in N'} A_i \cap W| \geqslant l$.

Niech $C = \{a, b, c, d, e, f\}$, $n = 3$, $k = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a, d, e, f\}$
2. $\{b, d, e, f\}$
3. $\{c, d, e, f\}$

Rozważmy komitet $W = \{a, b, c\}$. Czy komitet ten spełnia

- PJR? ✔
- EJR? ✗ – grupa {1,2,3} jest 3-cohesive, ale każdy wyborca ma tylko jednego reprezentanta w W

Proporcjonalność dla zgodnych preferencji

Definition (Priceability)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, komitet W jest priceable, jeśli istnieje $B > 0$ i funkcja $p_i : C \to [0, \frac{B}{n}]$, tż zachodzą poniższe warunki:

- C1 $c \notin A_i \implies p_i(c) = 0$
- C2 $\sum_{c \in C} p_i(c) \leqslant \frac{B}{n}$ dla każdego $i \in N$
- C3 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 1$ dla każdego $c \in W$
- C4 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 0$ dla każdego $c \notin W$
- C5 $\sum_{i \in N : c \in A_i}(\frac{B}{n} - \sum_{c' \in C} p_i(c')) \leqslant 1$ dla każdego $c \in C \setminus W$

Parę $\{B, \{p_i\}_{i \in N}\}$ nazywamy systemem cen dla W.

Proporcjonalność dla zgodnych preferencji

Definition (Priceability)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, komitet W jest priceable, jeśli istnieje $B > 0$ i funkcja $p_i : C \to [0, \frac{B}{n}]$, tż zachodzą poniższe warunki:

- C1 $c \notin A_i \implies p_i(c) = 0$
- C2 $\sum_{c \in C} p_i(c) \leqslant \frac{B}{n}$ dla każdego $i \in N$
- C3 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 1$ dla każdego $c \in W$
- C4 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 0$ dla każdego $c \notin W$
- C5 $\sum_{i \in N : c \in A_i} (\frac{B}{n} - \sum_{c' \in C} p_i(c')) \leqslant 1$ dla każdego $c \in C \setminus W$

Parę $\{B, \{p_i\}_{i \in N}\}$ nazywamy systemem cen dla W.

Theorem (Peters and Skowron, 2020)

Każdy priceable komitet rozmiaru k spełnia PJR.

Przykład 4

- C1 $c \notin A_i \implies p_i(c) = 0$
- C2 $\sum_{c \in C} p_i(c) \leqslant \frac{B}{n}$ dla każdego $i \in N$
- C3 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 1$ dla każdego $c \in W$
- C4 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 0$ dla każdego $c \notin W$
- C5 $\sum_{i \in N: c \in A_i}(\frac{B}{n} - \sum_{c' \in C} p_i(c')) \leqslant 1$ dla każdego $c \in C \backslash W$

Niech $C = \{a, b, c\}$, $n = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a\}$
2. $\{b\}$
3. $\{a, b\}$

Rozważmy komitet $W = \{a, b\}$. Czy jest on priceable?

Przykład 4

1. $c \notin A_i \implies p_i(c) = 0$
2. $\sum_{c \in C} p_i(c) \leqslant \frac{B}{n}$ dla każdego $i \in N$
3. $\sum_{i \in N} p_i(c) = 1$ dla każdego $c \in W$
4. $\sum_{i \in N} p_i(c) = 0$ dla każdego $c \notin W$
5. $\sum_{i \in N : c \in A_i} (\frac{B}{n} - \sum_{c' \in C} p_i(c')) \leqslant 1$ dla każdego $c \in C \setminus W$

Niech $C = \{a, b, c\}$, $n = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a\}$
2. $\{b\}$
3. $\{a, b\}$

Rozważmy komitet $W = \{a, b\}$. Czy jest on priceable? Musimy ustalić $B =$? i zdefiniować funkcje $\{p_i\}_{i \in N}$:

	a	b	c
p_1			
p_2			
p_3			

Przykład 4

- C1 $c \notin A_i \implies p_i(c) = 0$ ✔
- C2 $\sum_{c \in C} p_i(c) \leqslant \frac{B}{n}$ dla każdego $i \in N$
- C3 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 1$ dla każdego $c \in W$
- C4 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 0$ dla każdego $c \notin W$ ✔
- C5 $\sum_{i \in N : c \in A_i} (\frac{B}{n} - \sum_{c' \in C} p_i(c')) \leqslant 1$ dla każdego $c \in C \setminus W$

Niech $C = \{a, b, c\}$, $n = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a\}$
2. $\{b\}$
3. $\{a, b\}$

Rozważmy komitet $W = \{a, b\}$. Czy jest on priceable? Musimy ustalić $B =?$ i zdefiniować funkcje $\{p_i\}_{i \in N}$:

	a	b	c
p_1		0	0
p_2	0		0
p_3			0

Przykład 4

1. (C1) $c \notin A_i \implies p_i(c) = 0$ ✔
2. (C2) $\sum_{c \in C} p_i(c) \leqslant \frac{B}{n}$ dla każdego $i \in N$ ✔
3. (C3) $\sum_{i \in N} p_i(c) = 1$ dla każdego $c \in W$
4. (C4) $\sum_{i \in N} p_i(c) = 0$ dla każdego $c \notin W$ ✔
5. (C5) $\sum_{i \in N : c \in A_i} (\frac{B}{n} - \sum_{c' \in C} p_i(c')) \leqslant 1$ dla każdego $c \in C \backslash W$

Niech $C = \{a, b, c\}$, $n = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a\}$
2. $\{b\}$
3. $\{a, b\}$

Rozważmy komitet $W = \{a, b\}$. Czy jest on priceable? Musimy ustalić $B =$? i zdefiniować funkcje $\{p_i\}_{i \in N}$:

	a	b	c
p_1	$B/3$	0	0
p_2	0	$B/3$	0
p_3	$\frac{B/3}{2}$	$\frac{B/3}{2}$	0

Przykład 4

1. (C1) $c \notin A_i \implies p_i(c) = 0$ ✔
2. (C2) $\sum_{c \in C} p_i(c) \leqslant \frac{B}{n}$ dla każdego $i \in N$ ✔
3. (C3) $\sum_{i \in N} p_i(c) = 1$ dla każdego $c \in W$ ✔
4. (C4) $\sum_{i \in N} p_i(c) = 0$ dla każdego $c \notin W$ ✔
5. (C5) $\sum_{i \in N: c \in A_i} (\frac{B}{n} - \sum_{c' \in C} p_i(c')) \leqslant 1$ dla każdego $c \in C \backslash W$

Niech $C = \{a, b, c\}$, $n = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a\}$
2. $\{b\}$
3. $\{a, b\}$

Rozważmy komitet $W = \{a, b\}$. Czy jest on priceable? Musimy ustalić $B = 2$ i zdefiniować funkcje $\{p_i\}_{i \in N}$:

	a	b	c
p_1	$\frac{2}{3}$	0	0
p_2	0	$\frac{2}{3}$	0
p_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

Przykład 4

1. C1 $c \notin A_i \implies p_i(c) = 0$ ✔
2. C2 $\sum_{c \in C} p_i(c) \leqslant \frac{B}{n}$ dla każdego $i \in N$ ✔
3. C3 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 1$ dla każdego $c \in W$ ✔
4. C4 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 0$ dla każdego $c \notin W$ ✔
5. C5 $\sum_{i \in N: c \in A_i} (\frac{B}{n} - \sum_{c' \in C} p_i(c')) \leqslant 1$ dla każdego $c \in C \setminus W$ ✔

Niech $C = \{a, b, c\}$, $n = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a\}$
2. $\{b\}$
3. $\{a, b\}$

Rozważmy komitet $W = \{a, b\}$. Czy jest on priceable? Musimy ustalić $B = 2$ i zdefiniować funkcje $\{p_i\}_{i \in N}$:

	a	b	c
p_1	$\frac{2}{3}$	0	0
p_2	0	$\frac{2}{3}$	0
p_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

Przykład 4

- C1 $c \notin A_i \implies p_i(c) = 0$ ✔
- C2 $\sum_{c \in C} p_i(c) \leqslant \frac{B}{n}$ dla każdego $i \in N$ ✔
- C3 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 1$ dla każdego $c \in W$ ✔
- C4 $\sum_{i \in N} p_i(c) = 0$ dla każdego $c \notin W$ ✔
- C5 $\sum_{i \in N: c \in A_i} (\frac{B}{n} - \sum_{c' \in C} p_i(c')) \leqslant 1$ dla każdego $c \in C \setminus W$ ✔

Niech $C = \{a, b, c, d\}$, $n = 3$ oraz dane preferencje:

1. $\{a, d\}$
2. $\{b, d\}$
3. $\{a, b, d\}$

Rozważmy komitet $W = \{a, b\}$. Czy jest on priceable? Musimy ustalić $B = 3$ i zdefiniować funkcje $\{p_i\}_{i \in N}$:

	a	b	c	d
p_1	$\frac{2}{3}$	0	0	0
p_2	0	$\frac{2}{3}$	0	0
p_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0

Proporcjonalność dla słabych preferencji

Definition (Generalised solid coalition)

Dla ~~ostrego~~ uogólnioną profilu preferencji, podzbiór wyborców $N' \subseteq N$ tworzy uogólnioną solidną koalicję nad zbiorem kandydatów $C' \subseteq C$, jeśli $C' \succ_i C \setminus C'$ dla każdego $i \in N'$.

Proporcjonalność dla słabych preferencji

$\overline{C'}(N') = \{c \in C : \text{istnieją } i \in N', c' \in C' \text{ takie, że } c \succ_i c'\}$

Definition (Generalised PSC)

Dla danej instancji wyborów ze słabymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia uogólnione PSC, jeśli dla każdego zbioru $N' \subseteq N$ tworzącego uogólnioną solidną koalicję nad $C' \subseteq C$ i każdego $l \in \mathbb{N}$ takiego, że $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$, zachodzi $|\overline{C'}(N') \cap W| \geqslant \min(|C'|, l)$.

Proporcjonalność dla słabych preferencji

$\overline{C'}(N') = \{c \in C : \text{istnieją } i \in N', c' \in C' \text{ takie, że } c \succ_i c'\}$

Definition (Generalised PSC)

Dla danej instancji wyborów ze słabymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia uogólnione PSC, jeśli dla każdego zbioru $N' \subseteq N$ tworzącego uogólnioną solidną koalicję nad $C' \subseteq C$ i każdego $l \in \mathbb{N}$ takiego, że $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$, zachodzi $|\overline{C'}(N') \cap W| \geqslant \min(|C'|, l)$.

Definition (Inclusion PSC)

Dla danej instancji wyborów ze słabymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia IPSC, jeśli dla każdego zbioru $N' \subseteq N$ tworzącego uogólnioną solidną koalicję nad $C' \subseteq C$ i każdego $l \in \mathbb{N}$ takiego, że $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$, zachodzi $C' \subseteq W$ lub $|\overline{C'}(N') \cap W| \geqslant l$.

Proporcjonalność dla słabych preferencji

$\overline{C'}(N') = \{c \in C : \text{istnieją } i \in N', c' \in C' \text{ takie, że } c \succ_i c'\}$

Definition (Generalised PSC)

Dla danej instancji wyborów ze słabymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia uogólnione PSC, jeśli dla każdego zbioru $N' \subseteq N$ tworzącego uogólnioną solidną koalicję nad $C' \subseteq C$ i każdego $l \in \mathbb{N}$ takiego, że $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$, zachodzi $|\overline{C'}(N') \cap W| \geqslant \min(|C'|, l)$.

Definition (Inclusion PSC)

Dla danej instancji wyborów ze słabymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia IPSC, jeśli dla każdego zbioru $N' \subseteq N$ tworzącego uogólnioną solidną koalicję nad $C' \subseteq C$ i każdego $l \in \mathbb{N}$ takiego, że $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$, zachodzi $C' \subseteq W$ lub $|\overline{C'}(N') \cap W| \geqslant l$.

Fakt

Dla ostrych preferencji, uogólnione PSC oraz IPSC są równoważne PSC.

Przykład 5

Niech $C = \{c_1, \ldots, c_9\}$, $n = 3$, $k = 6$ oraz dane preferencje:

1. $c_1 \succ \{c_2, c_3, c_4\} \succ c_7 \succ c_8$
2. $c_1 \succ \{c_2, c_5, c_6\} \succ c_8 \succ c_7$
3. $c_7 \succ c_8 \succ c_9$

Przykład 5

Niech $C = \{c_1, \dots, c_9\}$, $n = 3$, $k = 6$ oraz dane preferencje:

1. $c_1 \succ \{c_2, c_3, c_4\} \succ c_7 \succ c_8$
2. $c_1 \succ \{c_2, c_5, c_6\} \succ c_8 \succ c_7$
3. $c_7 \succ c_8 \succ c_9$

Rozważmy komitet $W = \{c_1, c_3, c_5, c_7, c_8, c_9\}$.

Przykład 5

Niech $C = \{c_1, \ldots, c_9\}$, $n = 3$, $k = 6$ oraz dane preferencje:

1. $c_1 \succ \{c_2, c_3, c_4\} \succ c_7 \succ c_8$
2. $c_1 \succ \{c_2, c_5, c_6\} \succ c_8 \succ c_7$
3. $c_7 \succ c_8 \succ c_9$

Rozważmy komitet $W = \{c_1, c_3, c_5, c_7, c_8, c_9\}$.
Spełnia on uogólnione PSC, ale nie spełnia IPSC.

PJR i EJR raz jeszcze

Definition (PJR+)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia IPSC (PJR+) wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje kandydat $c \in C \backslash W$, grupa wyborców $N' \subseteq N$ i $l \in \mathbb{N}$, gdzie $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$ takie, że $c \in \bigcap_{i \in N'} A_i$ i $|\bigcup_{i \in N'} A_i \cap W| < l$.

PJR i EJR raz jeszcze

Definition (PJR+)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia IPSC (PJR+) wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje kandydat $c \in C \setminus W$, grupa wyborców $N' \subseteq N$ i $l \in \mathbb{N}$, gdzie $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$ takie, że $c \in \bigcap_{i \in N'} A_i$ i $|\bigcup_{i \in N'} A_i \cap W| < l$.

Definition (EJR+)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia EJR+, jeśli nie istnieje kandydat $c \in C \setminus W$, grupa wyborców $N' \subseteq N$ i $l \in \mathbb{N}$, gdzie $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$ takie, że $c \in \bigcap_{i \in N'} A_i$ i $|A_i \cap W| < l$ dla każdego $i \in N'$.

PJR i EJR raz jeszcze

Definition (PJR+)

Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia IPSC (PJR+) wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje kandydat $c \in C \setminus W$, grupa wyborców $N' \subseteq N$ i $l \in \mathbb{N}$, gdzie $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$ takie, że $c \in \bigcap_{i \in N'} A_i$ i $|\bigcup_{i \in N'} A_i \cap W| < l$.

Definition (EJR+)

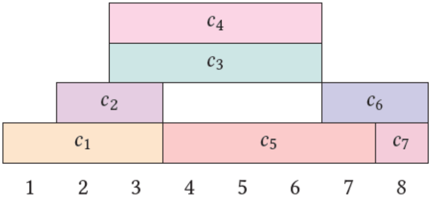
Dla instancji ze zgodnymi preferencjami, osiągalny komitet W spełnia EJR+, jeśli nie istnieje kandydat $c \in C \setminus W$, grupa wyborców $N' \subseteq N$ i $l \in \mathbb{N}$, gdzie $|N'| \geqslant l\frac{n}{k}$ takie, że $c \in \bigcap_{i \in N'} A_i$ i $|A_i \cap W| < l$ dla każdego $i \in N'$.

Theorem

Jeśli W spełnia EJR+, to spełnia też EJR i PJR+.

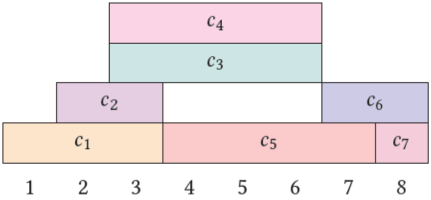
Przykład 6

Niech $C = \{c_1, \ldots, c_7\}$, $n = 8$, $k = 4$ oraz dane preferencje:



Przykład 6

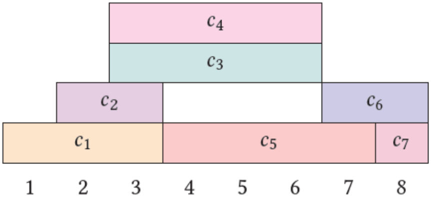
Niech $C = \{c_1, \ldots, c_7\}$, $n = 8$, $k = 4$ oraz dane preferencje:



Rozważmy komitet $W = \{c_1, c_2, c_3, c_7\}$.

Przykład 6

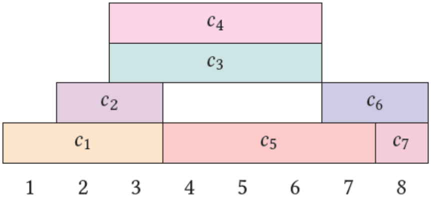
Niech $C = \{c_1, \ldots, c_7\}$, $n = 8$, $k = 4$ oraz dane preferencje:



Rozważmy komitet $W = \{c_1, c_2, c_3, c_7\}$. Komitet ten spełnia EJR, bo jedyna 2-cohesive grupa spełnia założenia.

Przykład 6

Niech $C = \{c_1, \dots, c_7\}$, $n = 8$, $k = 4$ oraz dane preferencje:



Rozważmy komitet $W = \{c_1, c_2, c_3, c_7\}$. Komitet ten spełnia EJR, bo jedyna 2-cohesive grupa spełnia założenia. EJR+ nie jest spełnione, bo w grupie wyborców $\{4, 5, 6, 7\}$ o rozmiarze $4 = 2\frac{n}{k}$, mającej wspólnego kandydata $c_5 \notin W$, każdy wyborca ma mniej niż 2 swoich kandydatów w W.

Złożoność obliczeniowa aksjomatów

Jak trudno sprawdzić, czy komitet W spełnia poniższe aksjomaty?

aksjomat	złożoność
Priceability	
PJR	
EJR	
PJR+	
EJR+	

Złożoność obliczeniowa aksjomatów

Jak trudno sprawdzić, czy komitet W spełnia poniższe aksjomaty?

aksjomat	złożoność
Priceability	P
PJR	coNP-zupełne
EJR	coNP-zupełne
PJR+	P
EJR+	P

Koniec

Dziękuję za uwagę.